

STUDI NUMERIK MENGENAI EFEK PENDULUM PADA SISTEM GETARAN BEBAS BERDERAJAT KEBEBASAN TUNGGAL

Antonius

Jurusan Teknik Sipil Universitas Sultan Agung Semarang

Abstract

This paper summarizes numerical studies on free vibration systems with single degree of freedom with tuned pendulum. The model of equation of motion will be derived by Lagrange equation. To get an approximate solution of the model, the perturbation method will be used to expand the model. The Runge-Kutta fourth order has been used as the numerical solution. The numerical solution derived model has been verified extensively against exact results, and the results show that the model simulate the dynamic response of free vibration system both with and without pendulum is satisfactorily. The pendulum parametric simulation based on Runge-Kutta method shows that length and mass of pendulum that used were influence the amplitude reduction of the dynamic response.

Keywords : *pendulum, free vibration systems, numerical studies*

PENDAHULUAN

Telah umum diketahui bahwa besarnya simpangan horisontal yang terjadi pada struktur bangunan yang bergetar akibat beban dinamis (beban gempa, angin, dan sebagainya) adalah parameter utama dalam menentukan tingkat daktilitas struktur. Simpangan yang semakin besar akan mengakibatkan terjadinya sendi plastis pada pertemuan balok-kolom dan kondisi ini mengharuskan asumsi desain berdasarkan kondisi non-linear. Hingga saat ini telah banyak cara yang digunakan untuk mengurangi besarnya simpangan horisontal struktur, misalnya dengan memasang alat peredam. Jenis peredam yang digunakan umumnya bersifat pasif. Berbeda dengan sistem peredam yang bersifat aktif, pada sistem peredam pasif tidak dibutuhkan adanya sumber daya dari luar untuk mengaktifkannya. Mekanisme dasar pelepasan energi pada sistem peredam pasif biasanya terbentuk melalui perubahan energi kinetik menjadi panas atau perubahan karakteristik getaran bangunan.

Beberapa jenis peredam pasif yang mengubah energi kinetik menjadi panas di antaranya adalah peredam tipe gesek (friksi), baja lunak, dan viskoelastik. Pada peredam tipe gesek, mekanisme pelepasan energi terbentuk dengan adanya pergeseran relatif (slip) pada sistem peredamnya, sedangkan pada peredam tipe baja lunak, mekanisme pelepasan energi terbentuk jika terjadi deformasi plastis (kelelahan) pada

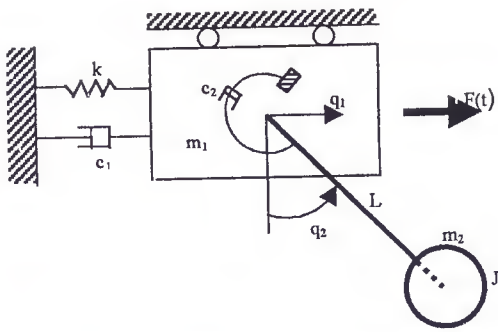
bahan baja lunaknya. Pendulum juga dapat berfungsi sebagai peredam, di mana mekanisme getarannya sangat bergantung pada eksitasi yang terjadi pada sistem. Pada dasarnya arah gerak pendulum adalah berlawanan dengan arah eksitasi sehingga karakteristik pendulum yang digunakan akan menentukan besarnya respon dinamik yang terjadi.

Di dalam tulisan ini akan dibahas analisis secara numerik mengenai respon dinamik sistem getaran bebas berderajat kebebasan tunggal yang diberi beban pendulum. Parameter pendulum seperti panjang dan massa pendulum akan dievaluasi untuk mengetahui efektivitas pendulum dalam meredam getaran.

PERSAMAAN GERAK SISTEM

Persamaan gerak sistem getaran dengan beban pendulum yang diberi eksitasi $F(t)$ diperlihatkan pada

Gambar 1. Sistem getaran tanpa pendulum pada gambar tersebut terdiri dari massa (m_1), kekakuan (k), redaman (c_1) dan simpangan (q_1), sedangkan pada pendulum adalah massa (m_2), redaman (c_2), inersia polar (J) dan simpangan (q_2).



Gambar 1. Sistem Getaran dengan Beban Pendulum

Selanjutnya persamaan lagrange digunakan sebagai dasar untuk menurunkan persamaan gerak sistem, yaitu (Clough & Penzien, 1993):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (1)$$

$i = 1, 2, 3, \dots$

Seperti terlihat pada Gambar 1 terdapat dua simpangan pada sistem tersebut, yaitu q_1 dan q_2 . Oleh karena itu, persamaan Lagrange dapat ditulis menjadi

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} &= Q_1 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial V}{\partial q_2} &= Q_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

T adalah energi kinetik dan V adalah energi potensial, yang masing-masing adalah [Thomson, 1993]:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \left\{ (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 L \cos q_2)^2 + (-L \dot{q}_2 \sin q_2)^2 \right\} \quad (3)$$

$$V = m_2 g L (1 - \cos q_2) + \frac{1}{2} k q_1^2 \quad (4)$$

Kerja virtual adalah:

$$\delta W_{np} = -c_1 \dot{q}_1 \delta q_1 + F(t) \delta q_1 - c_2 \dot{q}_2 \delta q_2 \quad (5)$$

Selanjutnya proses diferensiasi dilakukan terhadap persamaan (3), (4) dan (5) yang hasilnya diaplikasikan ke dalam persamaan lagrange sehingga dihasilkan persamaan gerak berikut.

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + m_2 \left(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 L \cos q_2 - \dot{q}_2^2 L \sin q_2 \right) &+ \\ c_1 \dot{q}_1 + k q_1 &= F(t) \\ J \ddot{q}_2 + m_2 \ddot{q}_1 L \cos q_2 + m_2 \ddot{q}_2 L^2 + & \\ m_2 g L \sin q_2 + c_2 \dot{q}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Aturan Deret Taylor fungsi sinus dan cosinus adalah

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots$$

Berdasarkan deret Taylor di atas, jika $q_2 = \alpha = 0(\epsilon)$, dan $\epsilon \ll 1$, maka $\sin q_2 = q_2$ dan $\cos q_2 = 1$ sehingga persamaan (6) dapat diubah menjadi

$$\left. \begin{aligned} (\hat{m}_1 + \hat{m}_2) \frac{d^2 \hat{q}_1}{dt^2} + \hat{m}_2 L \frac{d^2 \hat{q}_2}{dt^2} & \\ - \hat{m}_2 L \left(\frac{d \hat{q}_2}{dt} \right)^2 \hat{q}_2 + \hat{c}_1 \frac{d \hat{q}_1}{dt} + \hat{k} \hat{q}_1 &= F(t) \\ \hat{m}_2 L \frac{d^2 \hat{q}_1}{dt^2} + (\hat{m}_2 L^2 + \hat{J}) \frac{d^2 \hat{q}_2}{dt^2} & \\ + \hat{m}_2 g L \hat{q}_2 + \hat{c}_2 \frac{d \hat{q}_2}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Untuk mempermudah penyelesaian secara numerik dari persamaan (7) di atas, persamaan tersebut diekspansi dengan menggunakan metode perturbasi, yaitu dengan mendefinisikan parameter sebagai berikut (Mangkoesebroto dan Suprobo, 1993).

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}_1 &= K q_1 & ; & \hat{J} = \hat{m}_2 L^2 J \\ \hat{q}_2 &= \epsilon q_2 & ; & \hat{F} = \hat{m}_1 \omega^2 K F \\ \hat{t} &= \frac{1}{\omega} t & ; & \frac{\hat{m}_2}{\hat{m}_1} \\ \hat{k} &= \omega^2 \hat{m}_1 & ; & \gamma = \frac{g}{\omega^2 L} \\ \hat{c}_1 &= 2 \zeta \omega \hat{m}_1 & ; & \epsilon = \frac{K}{L} \\ \hat{c}_2 &= 2 \zeta \omega \hat{m}_2 L^2 \beta & & \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Keterangan:

L = panjang pendulum

ℓ = panjang karakteristik

ω = frekuensi karakteristik

Substitusi persamaan (8) ke persamaan (7) menghasilkan:

$$\left. \begin{aligned} (1+\alpha) \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \alpha \frac{d^2 q_2}{dt^2} \\ - \alpha \varepsilon q_2 \left(\frac{dq_2}{dt} \right)^2 + 2\zeta \frac{dq_1}{dt} + q_1 = F \\ \frac{d^2 q_1}{dt^2} + (1+J) \frac{d^2 q_2}{dt^2} + 2\zeta \beta \frac{dq_2}{dt} + \gamma q_2 = 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

Persamaan (9) adalah persamaan diferensial yang selanjutnya akan diselesaikan secara numerik.

PEMBAHASAN

Solusi Numerik

Persamaan (9) dapat ditulis menjadi:

$$\left. \begin{aligned} (1+\alpha) \ddot{q}_1 + \alpha \ddot{q}_2 - \alpha \varepsilon^2 q_2 (\dot{q}_2)^2 + 2\zeta \dot{q}_1 \\ + q_1 = F \\ \ddot{q}_1 + (1+J) \ddot{q}_2 + 2\zeta \beta \dot{q}_2 + \gamma q_2 = 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

Persamaan tersebut mempunyai dua variabel yaitu q_1 dan q_2 yang secara umum dapat ditulis.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 = f(q_1, q_2, t) \\ \ddot{q}_2 = g(q_1, q_2, t) \end{aligned} \right\} (11)$$

Selanjutnya persamaan (10) dipecah menjadi empat buah persamaan diferensial tingkat-1, dengan menggunakan transformasi.

Transformasi:

$$\left. \begin{aligned} q_1 = y_1 & ; y_1' = \dot{q}_1 = y_2 \\ \dot{q}_1 = y_2 & ; y_2' = \ddot{q}_1 \\ q_2 = y_3 & ; y_3' = \dot{q}_2 = y_4 \\ \dot{q}_2 = y_4 & ; y_4' = \ddot{q}_2 \end{aligned} \right\} (12)$$

$$\begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{Bmatrix} = \frac{1}{1+J+\alpha J} \begin{bmatrix} 0 & 1+J+\alpha J & 0 & 0 \\ -(1+J) & 2\zeta(1+J) & \alpha(\gamma+\varepsilon^2 y_4^2) & 2\alpha\beta\zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1+J+\alpha J \\ 1 & 2\zeta & -(\gamma+\alpha\gamma) & -2(1+\alpha)\beta\gamma \\ & & +\alpha\varepsilon^2 y_4^2 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} + \frac{F}{1+J+\alpha J} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1+J \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} (15)$$

Substitusi persamaan (12) ke persamaan (10) menghasilkan persamaan (13).

$$\left. \begin{aligned} (1+\alpha) y_2' + \alpha y_4' - \alpha \varepsilon^2 y_3 y_4^2 \\ + 2\zeta y_2 + y_1 = F \\ y_2' + (1+J) y_4' + \gamma y_3 \\ + 2\zeta \beta y_4 = 0 \end{aligned} \right\} (13)$$

Persamaan (14) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1+J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2\zeta & \alpha\varepsilon^2 y_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\gamma & -2\zeta\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} + F \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} (14)$$

Selanjutnya dengan melakukan *invers* terhadap suku pertama ruas kiri, kemudian hasilnya dikalikan dengan ruas kanan, persamaan (14) berubah menjadi persamaan (15). Untuk sistem getaran bebas, maka $F = 0$. Dengan demikian, persamaan (15) berubah menjadi persamaan (16).

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{1+J}{1+J+\alpha J} y_1 - \frac{2\zeta(1+J)}{1+J+\alpha J} y_2 + \frac{\alpha(\gamma + \varepsilon^2 y_4^2 + J\varepsilon^2 y_4^2)}{1+J+\alpha J} y_3 + \frac{2\alpha\beta\zeta}{1+J+\alpha J} y_4 \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= \frac{1}{1+J+\alpha J} y_1 + \frac{2\zeta}{1+J+\alpha J} y_2 - \frac{\gamma + \alpha\gamma + \alpha\varepsilon^2 y_4^2}{1+J+\alpha J} y_3 - \frac{2(1+\alpha)\beta\zeta}{1+J+\alpha J} y_4 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

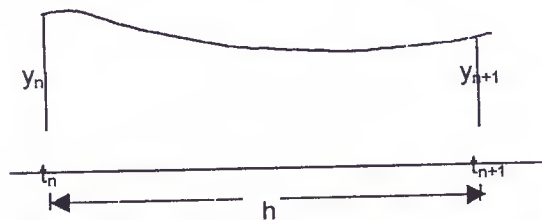
Persamaan (16) yang dihasilkan adalah persamaan diferensial simultan tingkat-1. Persamaan tersebut dapat ditulis secara umum:

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= f(y_1, y_2, y_3, y_4, t) \\ y_2' &= g(y_1, y_2, y_3, y_4, t) \\ y_3' &= i(y_1, y_2, y_3, y_4, t) \\ y_4' &= j(y_1, y_2, y_3, y_4, t) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

di mana f, g, i dan j merupakan pernyataan fungsi dari y_1, y_2, y_3, y_4 dan t .

Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta orde ke-4 yang dikembangkan adalah sebagai berikut.



Gambar 2. Sistem Koordinat pada Metode Runge-Kutta orde ke-4

Berdasarkan Gambar 2, fungsi $y' = f(y, t)$; di mana f merupakan fungsi dari y dan t . Apabila t_n dan y_n merupakan harga awal, sedangkan h adalah perubahan waktu, maka ordinat y_{n+1} dapat dihitung (persamaan 18).

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (18)$$

sedangkan harga-harga k adalah:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(y_n, t_n) \\ k_2 &= hf\left(y_n + \frac{k_1}{2}; t_n + \frac{h}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(y_n + \frac{k_2}{2}; t_n + \frac{h}{2}\right) \\ k_4 &= hf(y_n + k_3; t_n + h) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Harga k pada persamaan (19) dapat dicari dengan mengembangkan persamaan tersebut untuk menyelesaikan satu set persamaan (16). Berdasarkan metode Runge-Kutta orde ke-4, harga y_{n+1} untuk masing-masing persamaan (16) dapat ditulis secara umum (Chapra & Canale, 1985).

$$\left. \begin{aligned} y_{1(n+1)} &= y_{1(n)} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ y_{2(n+1)} &= y_{2(n)} + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\ y_{3(n+1)} &= y_{3(n)} + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\ y_{4(n+1)} &= y_{4(n)} + \frac{1}{6}(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Nilai k, l, m dan n untuk metode Runge-Kutta orde ke-4 ditulis pada persamaan (21).

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= hf(y_{1(n)} + k_3; y_{2(n)} + l_3; y_{3(n)} + m_3; y_{4(n)} + n_3; t_n + h) \\ l_1 &= hg(y_{1(n)} + k_3; y_{2(n)} + l_3; y_{3(n)} + m_3; y_{4(n)} + n_3; t_n + h) \\ m_1 &= hf(y_{1(n)} + k_3; y_{2(n)} + l_3; y_{3(n)} + m_3; y_{4(n)} + n_3; t_n + h) \\ n_1 &= hf(y_{1(n)} + k_3; y_{2(n)} + l_3; y_{3(n)} + m_3; y_{4(n)} + n_3; t_n + h) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Validasi Hasil Numerik Vs Hasil Eksak

Model numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta tersebut selanjutnya diselesaikan dengan program komputer bahasa Fortran. Hasil numerik tersebut kemudian divalidasi dengan hasil solusi eksak yang telah dilakukan oleh Mangkoesobroto dan Suprobo (1993). Pengujian model dilakukan dengan mengambil beberapa konstanta sebagai berikut.

Kasus dengan pendulum

- L = panjang pendulum = 1225 mm
- R = jari-jari bola pendulum = 500 mm
- J = momen inersia bola pendulum

$$= \frac{3R^2}{5\ell^2} = 0,099958$$

$$\alpha = \alpha_0 = 0,5$$

$$\zeta = \text{rasio redaman, diambil } 0,1$$

$$\beta = 2$$

$$J_1 = \frac{J}{\zeta} = 0,9996$$

$$J_1 = \frac{\beta\gamma_1}{\beta + 1 + \alpha_0\beta} \Rightarrow \gamma_1 = 1,999$$

$$\gamma = \zeta\gamma_1 = 0,1999$$

$$\varepsilon \ll 1 \Rightarrow \varepsilon \approx 0$$

Kasus tanpa pendulum

$$\alpha = 0$$

$$J = 0$$

$$\zeta = 0,1$$

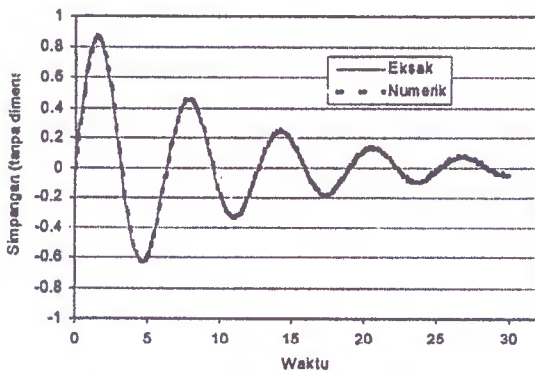
$$\beta = 0$$

$$\gamma = 0$$

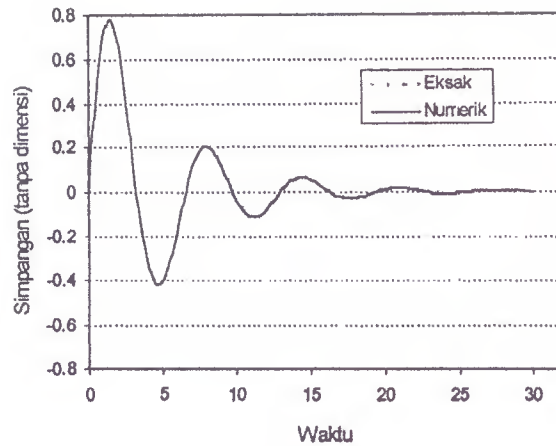
$$\varepsilon = 0$$

Selanjutnya harga konstanta tersebut, baik untuk kasus dengan pendulum maupun kasus tanpa pendulum, disubstitusikan ke persamaan (16).

Gambar 3 dan 4 memperlihatkan hasil validasi antara model numerik dan solusi secara eksak. Terlihat pada gambar tersebut bahwa respon dinamik antara solusi eksak dan solusi numerik relatif berimpit, baik untuk kasus sisteim getaran bebas tanpa pendulum maupun dengan pendulum. Hasil ini mengindikasikan bahwa analisis numerik yang dilakukan sangat akurat.



Gambar 3. Verifikasi antara Solusi Eksak dan Solusi Numerik; Kasus tanpa Pendulum



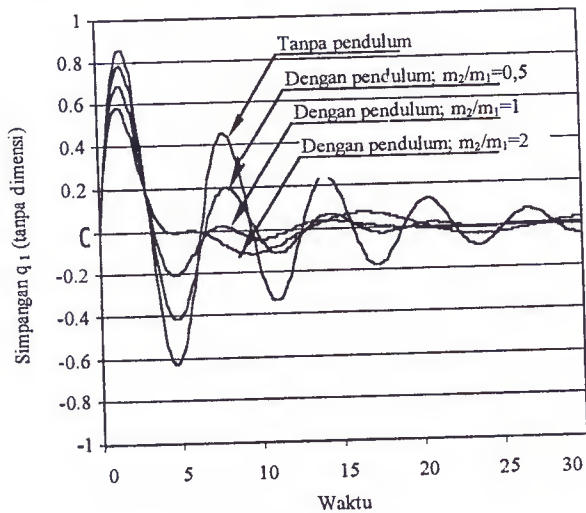
Gambar 4. Verifikasi antara Solusi Eksak vs Solusi Numerik

Studi Parameter

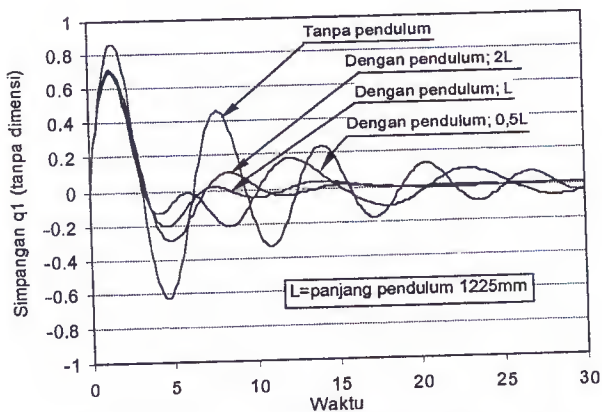
Studi parameter pendulum dilakukan dengan memvariasikan massa dan panjang pendulum. Gambar 5 menunjukkan plot simpangan terhadap waktu untuk kasus tanpa pendulum dan kasus dengan pendulum yang variasi rasio antara massa pendulum terhadap massa sistem getaran (m_2/m_1), sedangkan panjang pendulum (L) adalah tetap. Terlihat pada Gambar 5 tersebut bahwa untuk $m_2/m_1=0,5$, sistem struktur dapat teredam secara periodik seiring dengan bertambahnya waktu. Apabila $m_2/m_1=1$, maka redaman struktur terjadi lebih cepat daripada kasus yang pertama di atas. Apabila $m_2/m_1=2$, terjadi redaman yang sangat kuat (*overdamped*) selama lima satuan waktu pertama dan tidak terlihat adanya respon struktur saat waktu kelima tersebut. Pada waktu berikutnya simpangan yang terjadi sempat membesar dalam waktu yang relatif singkat yang kemudian diikuti dengan penurunan simpangan kembali.

Gambar 6 adalah plot simpangan terhadap waktu dengan mengubah-ubah panjang pendulum, sedangkan m_2/m_1 tetap. Pada kasus panjang pendulum sama dengan L terlihat struktur teredam dengan baik. Apabila panjang pendulum diperpendek menjadi $0,5L$ akan tampak bahwa terjadi redaman pada sistim getaran secara signifikan sampai sepuluh detik pertama. Ketidakstabilan sistem getaran terjadi pada waktu sesudahnya, yaitu dengan membesarnya simpangan sistem dalam waktu relatif singkat, namun simpangan tersebut cenderung mengecil

dengan bertambahnya waktu. Apabila panjang pendulum diubah menjadi $2L$, maka reduksi simpangan sangat efektif, dimana redaman berjalan secara stabil tanpa sempat menimbulkan pembesaran simpangan.



Gambar 5. Respon Dinamik q_1 dengan Variasi m_2/m_1 ; L tetap (1225 mm)



Gambar 6. Respon Dinamik q_1 dengan Variasi Panjang Pendulum ($L=1225$ mm); m_2/m_1 teta

KESIMPULAN

Berdasarkan kajian terhadap hasil studi di atas, maka dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut: Metode Runge-Kutta orde ke-4 yang digunakan dalam solusi numerik sangat akurat dalam memprediksi respon dinamik sistem getaran bebas yang diberi beban pendulum, sehingga metode ini dapat digunakan untuk mensimulasi respon dinamik struktur. Pemilihan massa pendulum yang digunakan memegang peranan dalam proses respon dinamik yang terjadi. Dalam kasus di atas, rasio $m_2/m_1=0,5$ dan $m_2/m_1=1$ relatif dapat meredam sistim getaran dengan baik, dalam arti simpangan yang terjadi cenderung terus menurun tanpa terjadi pembesaran simpangan di waktu tertentu. Penggunaan panjang pendulum yang semakin panjang akan sangat efektif dalam meredam respon dinamik sistim getaran.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Prof. Dr. Ir. Priyo Suprobo (ITS) atas saran-saran isi paper ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Clough, R.W. and Penzien, J. 1993. *Dynamics of Structures*,. Editions, 2nd Edition. McGraw-Hill Int.
- Chapra, S. and Canale, R.P. 1985. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Book Company.
- Mangkoesebroto, S. and Suprobo, P. 1993. "Mathematical Free Vibration Analysis of Single Degree of Freedom with Tuned Pendulum".
- Makalah Seminar *Aspek Rekayasa Sipil dan Bidang Terkait dalam Mitigasi Bahaya Gempa*. Mei, ITB Bandung.
- Panayotidi, T. and DiMaggio, F. (1988). "Pendulum with Support in Circular Orbit". *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Volume 114, No.3, March.
- Thomson, W.T. 1993. *Theory of Vibration with Applications*. Prentice-Hall International.