TEKNIK-TEKNIK
DIFERENSIAL DAN INTEGRAL

Penyusun :
Dr. Hj. Sri Arttini Dwi P, M.Si

Penerbit
UNISSULA Press 2011

Perpustakaan Nasional
Katalog Dalam Terbitan (KDT)

ISBN. 978 - 602 - 8420 - 97 - 6
TEKNIK-TEKNIK DIFERENSIAL DAN INTEGRAL
Oleh: DR. Hj. Sri Arttini Dwi P, M.Si.
16 x 24 ; iv + 126

Diterbitkan oleh
UNISSULA PRESS Semarang
Tata letak: SA-Press
Cetakan Pertama : Desember 2011

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb.

Puji syukur tak henti-hentinya penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT, karena hanya dengan hidayahNya penulis dapat menyelesaikan buku yang berjudul **Teknik-teknik Diferensial dan Integral**. Tak lupa sholawat dan salam senantiasa terlimpahkan kepada junjungan kita Nabi besar Muhammad SAW.

Buku ini merupakan pengarah dan pengantar bagi mahasiswa dalam memahami teknik-teknik penyelesaian permasalahan matematis, yang berhubungan dengan diferensial dan Integral. Untuk peningkatan kompetensi diharapkan mahasiswa juga mengikuti contoh soal-soal yang dilaksanakan dengan bimbingan seorang asisten mahasiswa, serta berusaha meningkatkan diri diluar kelas. Buku ini diharapkan dapat memandu mahasiswa didalam melaksanakan kegiatan pembelajaran selain buku-buku referensi tentang diferensial dan integral yang ada. Saran dan kritik sangat kami harapkan, mengingat buku ini masih sangat jauh dari sempurna.

Kepada semua pihak yang memberikan dukungan dan bantuan dalam penyusunan buku ini, penulis menghaturkan terima kasih yang sebesar-besarnya.

Wassalamualaikum Wr. Wb.

Semarang, November 2011

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i

KATA PENGANTAR iii

DAFTAR ISI iv

BAB I PENDAHULUAN

1.1. Sistem Bilangan 1

1.2. Himpunan 2

1.3. Macam-macam Fungsi 2

1.3.1. Fungsi Aljabar 2

1.3.2. Fungsi Transendental 3

1.3.3. Segitiga Pascal dan Binomium 4

1.3.4. Cara Menyajikan Suatu Persamaan 6

BAB II Barisan Bilangan, Limit Fungsi dan Derivatif

2.1. Barisan Bilangan 9

2.2. Limit Fungsi 10

2.3. Kekontinuan 12

2.4. derivative 13

2.4.1. Rumus-rumus Derivatif 14

2.4.2. Turunan Fungsi komposisi atau Aturan Rantai 17

2.4.3. Teorema Turunan Fungsi Invers 18

2.4.4. mendeferensialkan Fungsi Implisit 20

2.4.5. Mendeferensialkan Fungsi dengan Peubah ....
Lebih Dari Satu 22

2.4.6. Mendeferensialkan Persamaan Bentuk Parameter 22

2.4.7. Mendeferensialkan Fungsi Pangkat Fungsi 24

BAB III TERAPAN DERIVATIF

3.1. Fungsi Naik Dan Turun 26

3.2. Teorema Rumus Taylor 30

3.3. Bentuk-bentuk Tak Tertentu 32

BAB IV INTERGAL

4.1. Dibawa ke Bentuk I $\int df(x) = f(x) + c$ 34

4.2. Rumus Dasar Intergal 34

4.3. Bentuk II 34

4.4. Dibawa ke Rumus III 36

4.5. Dibawa ke Rumus IV 36

4.6. Intergal Parsial 37

4.7. Internal Bentuk Rasional 37

4.8. Intergal Fungsi Trogonometri 41

4.9. Intergal Fungsi Pecah Rasional dalam *Sin* dan *Cos* 41

4.10.Intergal dengan Substitusi 42

4.11.Substitusi Aljabar 45

BAB V TERAPAN INTEGRAL

5.1 Luas Daerah Bidang Datar 46

5.2 Volume Benda Putar 49

5.3 Integral Ganda 52

LATIHAN SOAL-SOAL 53

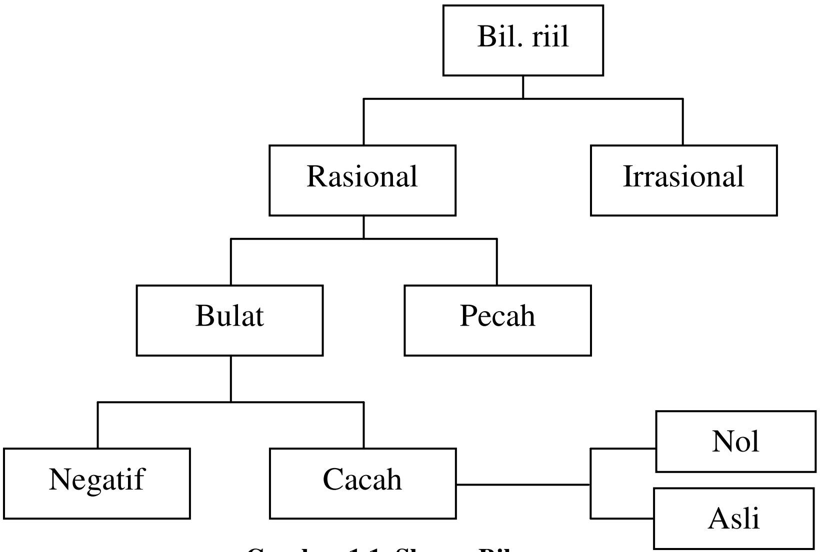
RUMUS-RUMUS INTEGRAL ELEMENTER 58

DAFTAR PUSTAKA 60

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Sistem Bilangan

Sistem bilangan yang akan dibahas disini adalah sistem bilangan riil. Untuk memperjelas definisi bilangan riil, berikut diberikan skema bilangan dari yang paling sederhana sampai bilangan kompleks.



Gambar 1.1. Skema Bilangan

Cara penyajian bilangan riil dapat menggunakan interval atau selang. Ada selang terbuka, tertutup dan selang setengah terbuka atau setengah tertutup. Untuk lebih jelasnya diberikan contoh penyajian bilangan riil dengan selang :

- Selang tertutup : $\{x \mid \alpha \leq x \leq b, x \in R\}$, dengan gambar a b
- Selang terbuka : $\{x \mid \alpha \angle x \angle b, x \in R\}$, dengan gambar a b
- Selang setengah terbuka atau setengah tertutup :

  $\{x \mid \alpha \leq x \angle b, x \in R\}$ atau $\{x \mid \alpha \angle x \leq b, x \in R\}$,

  dengan gambar a b atau a b

Untuk selanjutnya semesta pembicaraan yang dipakai adalah bilangan riil.

1.2. Himpunan

Himpunan adalah kumpulan elemen-elemen yang mempunyai sifat keterikatan antara anggotanya dan yang berada dalam satu kesatuan. Cara menyajikan himpunan adalah dengan beberapa cara: dengan pendaftaran, yaitu mendaftar semua anggota yang dimiliki himpunan itu. Dengan pencirian, yaitu dengan menyebutkan ciri himpunan yang dimaksud, sedangkan dengan cara diagram Venn adalah memasukkan anggota yang memiliki ciri yang sama dalam satu himpunan tertentu, dan himpunan lain adalah anggota himpunan dengan ciri yang berbeda.

Ada beberapa operasi antar himpunan, yaitu :

1. Union atau gabungan. A union B atau A gabungan B dapat dinyatakan sebagai $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B, x \in R\}$.
2. Interseksi atau irisan. A interseksi B atau A irisan., B dapat dinyatakan sebagai $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B, x \in R\}$.
3. Pengurangan. $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B, x \in R\}$
4. Penambahan. $A + B = (A \cup B) - (A \cap B)$
5. Perkalian. $A \, x \, B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B, a \in R, b \in R\}$
6. Komplemen atau A^c adalah $\{a \mid a \notin A, a \in R\}$

1.3. Macam-macam fungsi

1.3.1 Fungsi Aljabar

1. Polinom atau suku banyak

   Contoh : polinom/suku banyak

   $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

   Polinom di atas dinamakan polynomial berderajat n.

2. Fungsi rasional : $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}, Q(x) \neq 0$

   Contoh : $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 5}{x^2 - 9}$

3. Fungsi irrasional, adalah fungsi yang bukan rasional. Sehingga nilai-nilai dalam fungsi bukan merupakan bilangan rasional.

1.3.2. Fungsi Transendental

1. Fungsi Trigonometri

   Contoh : y = sin x
2. Fungsi Siklometri

   Contoh : y = arc sin x
3. Fungsi Eksponen

   Contoh : $y = a^x$
4. Fungsi Logaritma

   Contoh : y = log x, ${}^e\log a = \ln a$
5. Fungsi Hiperbolik

   Contoh : sinh x $= \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}; \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
6. Kebalikan Fungsi Hiperbolik

   Contoh :

   $y = \sinh^{-1} x$

   $x = \sinh y \qquad \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = x$

   $y = \cosh^{-1} x$

   $y = \tanh^{-1} x$
7. Fungsi Genap & Fungsi Ganjil

   Definisi fungsi genap dan fungsi ganjil adalah sebagai berikut :

   Disebut fungsi genap jika f(-x) = f(x), dan disebut fungsi ganjil jika memenuhi f(-x) = -f(x)

   Contoh fungsi genap :

   $f(x) = \cos x$

   $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 4}$$

Contoh fungsi ganjil :

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \frac{1}{x^5}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

8. Fungsi Periodik

   Yang dimaksud fungsi periodik adalah suatu fungsi yang nilainya selalu berulang setiap selang tertentu. Sebagai contoh diberikan fungsi trigonometri sebagai berikut :

   f(x) = sin x = sin (x+2 k π)

   f(x) = cos x = cos (x+2 k π)

   f(x) = tan x = sin (x+ k π)

   f(x) = cotg x = sin (x+ k π)

   Fungsi diatas merupakan fungsi periodik dengan periode k.

1.3.3 Segitiga Pascal dan Binomium Newton

Akan dibahas tentang penyelesaian suatu fungsi aljabar berbentuk $(a+b)^m$, dengan m bilangan positif atau negatif. Diharapkan dapat dimengerti beda penggunaan segitiga pascal dan rumus binomium newton.

<u>Segitigas Pascal</u>

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \text{dst} & & & & \end{array}$$

Gambar 1.2 Skema Segitiga Pascal

Dengan menggunakan segitiga Pascal, maka perhitungan–perhitungan dibawah ini akan lebih mudah dipahami.

$$(a-b)^3 \quad = 1.a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1.b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^4 \quad = a + (-b))^4$$

$$= 1.a^4 + 4a^3(-b) + 6a^2(-b)^2 + 4a(-b)^3 + 1.b^4$$

$$= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 6ab^3 + b^4$$

Dst...

Jika Ditemukan persamaan berbentuk $(a \pm b)^{1/2}$, maka pemecahannya tidak dapat menggunakan segitiga Pascal. Diperlukan rumus yang lebih umum yang selain dapat dipakai untuk mencari bentuk-bentuk $(a \pm b)$ berpangkat bulat, juga dapat dipakai untuk menemukan penyelesaian untuk $(a \pm b)$ berpangkat bilangan pecah. Rumus umum yang dipakai untuk menyelesaikan permasalahan diatas adalah Rumus Binomium Newton, yang akan dibahas berikut ini.

Rumus Binomium Newton

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{(n-1)} b^i$$

Dimana $\quad C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$

$$n! = 1,2,3,\ldots.n$$

Sehingga

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \ldots$$

1.3.4 Cara Menyajikan Suatu Persamaan

Ada beberapa cara penyajian suatu persamaan berdasarkan beubah-peubahnya.

1. **Bentuk Implisit :**

   Peubah bebas dan tak bebas berada dalam satu ruas.

   F (x,y) = 0

   G (x,y,z) = 0

   Contoh : $x^2 + 2y + 10 = 0$

2. **Bentuk Explisit :**

   Peubah bebas dan tak bebas dalam ruas yang berbeda.

   y = f(x) ; x = f(y) ; z = f(x,y)

   Contoh : $y = x^2 + 2x + 8$

3. Be**ntuk Parameter**

   Peubah merupakan fungsi dari suatu parameter

   $x = g(\varphi)$, φ parameter

   $y = g(\varphi)$

   $z = (\varphi)$

   Misalkan diberikan persamaan : $x = 2t + t^2$; $y = 5t+10t^2$; $z = 3t^2 + 6t + 5$

   Contoh :

   Sebagai Contoh diberikan suatu persamaan lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari 1. Bagaimanakah persamaannya dalam bentuk implisit, eksplisit, dan bentuk parameter.

   Jawab :

   $x^2 + y^2 = 1$

   Bentuk Implisit :

   $x^2 + y^2 - 1 = 0$

   Bentuk explisit :

   $y^2 = 1 - x^2$

   $y = \pm\sqrt{1-x^2}$

Bentuk parameter :

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ \\ y = \sin t \end{array}\right\} \text{ t parameter}$$

1.4. Koordinat Kutub / Polar

Setiap titik dalam koordinat kutub dinyatakan dengan r dan v

r = modulus yaitu jarak dari 0 ke titiknya (OP)

ϑ = argumen adalah sudut yang dibentuk oleh sumbu x positif dengan arah berlawanan arah jarum jam dengan garis OP.

O adalah titk kutub, sedangkan OX adalah sumbu kutub.

Hubungan koordinat Orthogonal dengan kutub Polar adalah sebagai berikut :

$y = r \sin \vartheta$, $x = r \cos \vartheta$ dan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

<u>Contoh :</u>

1. $r = 5$ maka $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$5 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$25 = x^2 + y^2$$

2. $r = 3 \cos V$ maka $= 3\ \frac{x}{r}$

$$r = 3\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$x^2 + y^2 = 3\ x$$

$$x^2 - 3x + y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)$$

Pusat $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, jari-jari $= \frac{2}{3}$

3. $r = 4 \sin V$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$x^2 + y^2 = 4y$

$x^2 + y^2 - 4y = 0$

$x^2 + (y-2)^2 = 2^2$

lingkaran pusat (0,2) jari-jari 2

BAB II
BARISAN BILANGAN, LIMIT FUNGSI DAN DERIVATIF

Dalam membicarakan masalah barisan bilangan, maka setiap diberikan kata barisan, yang dimaksud adalah barisan barisan bilangan.

2.1. Barisan Bilangan

Definisi :

Bila C adalah himpunan tak kosong, barisan bilangan dalam C adalah harga fungsi f dari A ke C, dimana A adalah bilangan asli.

Cara penyajiannya adalah $\{C_1, C_2, \ldots.. C_n\}$ atau $\{C_n\}$, n εA atau f(n) = C_n, nεA

Contoh :

1. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots.., Cn = \frac{1}{n}\right\}$
2. $\{1,2,3,4,\ldots..,Cn = n\}$
3. $\{-1,1,-1,\ldots.,Cn = (-1)^n\}$

Limit suatu barisan bilangan didefenisikan sebagai

$\lim\limits_{n\to\infty} Cn = l$ artinya pada setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan indeks $n_o = n_o(\varepsilon)$, sehingga untuk $n \geq n_o$ berlaku $|C_n - l| < \varepsilon$

Barisan yang berlimit disebut konvergen, sedangkan barisan yang tak berlimit disebut divergen. Nul sequence adalah suatu barisan yang limitnya nol.

Contoh :

Cn = $\frac{n}{n+1}$ $\quad l = 1$

Misal diambil $\varepsilon = \frac{1}{800}$

Dicari bilangan indeks n_o yang bergantung ε, Maka,

$|Cn - 1| < \varepsilon$

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{800}$$

$$-\frac{1}{800} < \frac{n}{n+1} - \frac{(n+1)}{n+1} < \frac{1}{800}$$

$$-\frac{1}{800} < \frac{-1}{n+1} < \frac{1}{800}$$

$$-\frac{1}{800} < \frac{-1}{n+1} dan \frac{-1}{n+1} < \frac{1}{800}$$

$- n - 1 < - 800$ dan $- 801 < n+1$

$- n < - 799$ dan $-801 < n$

$n > 799$ dan $n > - 801$

Jadi yang memenuhi

$n > 799$ ($n_o = 799$)

Sehingga n dipenuhi adalah 800

$|C_{800} - 1| < \frac{1}{800}$

2.2. Limit Fungsi

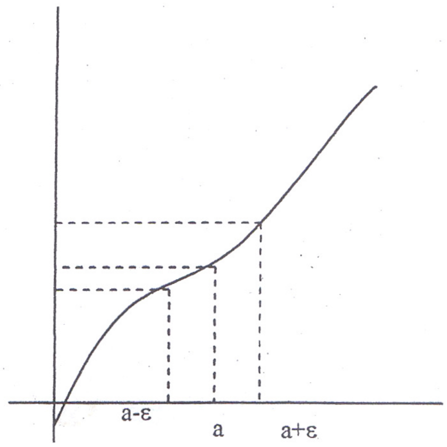
<u>Definisi :</u>

L disebut limit kiri dari suatu fungsi f(x) untuk x mendekati a dari sebelah kiri atau $\lim_{x - a^-} f(x) = L$ artinya untukk setiap $\varepsilon > 0$ dapat ditemukan $\delta(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap harga dalam interval $a - \delta < x < a$ berlaku (f(x)–L<ε).

L disebut limit kanan dari suatu fungsi f(x) untuk x mendekati a dari sebelah kanan atau $\lim_{x - a^+} f(x) = L$ artinya setiap $\varepsilon > 0$ dapat ditemukan s(ε) sedemikian sehingga untuk setiap harga x dalam interval $a < x < a + \delta$ berlaku (f(x)–L<ε)

Jika $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Maka dinyatakan f(x) mempunyai limit di x = a atau $\lim_{x \to a} f(x) = L$



Gambar 2.1 Skema Limit

Contoh :

f(x) $= \dfrac{1}{x-1}$ atau y = $\dfrac{1}{x-1}$

Nilai f(x) untuk x sama satu tidak terdefinisi, karena nilai f (x) menjadi pecahan dengan penyebut bernilai nol.

f(x) = x, untuk x > 1

= x^2, untuk x < 1

= 0, untuk x = 1

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1^2 = 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1,$ karena limit kiri sama dengan limit kanan maka dengan definisi diatas terbukti $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

<u>Teorema-teorema tentang limit :</u>

Ada beberapa teorma-teorema penting yang tidak diberikan buktinya disini, akan tetapi dibidang teknik penggunaannya sangat penting.

Jika diberikan $\lim_{x-C} f(x) = f$ dan $\lim_{x-C} g(x) = g$, maka :

1. $\lim_{x-C}\{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x-C} f(x) \pm \lim_{x-C} g(x) = f \pm g$
2. $\lim_{x-C} k\, f(x) = k.\lim_{x-C} f(x) = kf$, dimana k adalah suatu konstanta.
3. $\lim_{x-C} f(x).g(x) = \lim_{x-C} f(x) \lim_{x-C} g(x) = f.g$
4. $\lim_{x-C} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x-C} f(x)}{\lim_{x-C} g(x)} = \dfrac{f}{g}, g \neq 0$
5. $\lim_{x-C} \{f(x)\}^n = \{\lim_{x-C} f(x)\}^n = f^n$
6. $\lim_{x-C} \{f(x)\}^{g(x)} = \{\lim_{x-C} f(x)\}^{\lim_{x-C} g(x)}$
7. $\lim_{x-c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x-c} f(x)} = \sqrt[n]{f}, f \geq 0$
8. $\lim_{X-C} \ln f(x) = \ln \lim_{x-c} f(x) = \ln f, f > 0$
9. $\lim_{x-c} k^{f(x)} = k^{\lim_{x-c} f(x)} = k^f$
10. $\lim_{x-\approx} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \lim_{x-\approx} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{-x} = e$

2.3. Kekontinuan

<u>Definisi :</u>

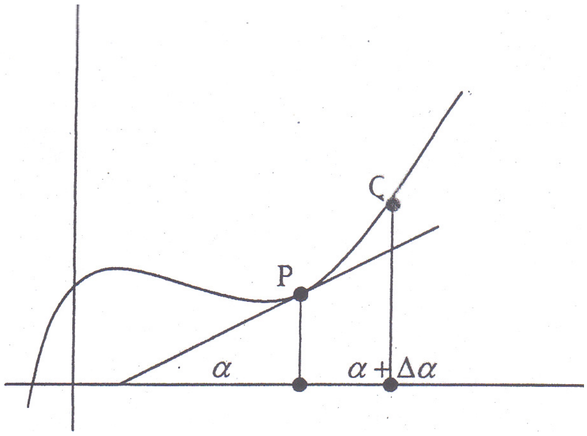
Sebuah fungsi f dinamakan kontinu pada c, jika

1. f(c) ada (f terdefinisi di c)
2. $\lim_{x-3} f(x) =$ ada, berarti limit kanan sama dengan limit kiri
3. $\lim_{x-3} f(x) = f(C)$

Jika salah satu syarat tidak dipenuhi, maka f(x) diskontinu di C.

2.4. Derivatif

Skema



Gambar 2.2 Fungsi y = f(x) untuk mempermudah pemahaman derivatif.

Jika ada 2 titik : P(x,y); Q(x+Δx,y+Δy)

P dan Q berada pada fungsi y = f(x)

Garis singgung di P membentuk α dengan sumbu x.

Garis singgung di Q membentuk $\alpha + \Delta\alpha$ dengan sumbu x.

$\tan < QPS = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ dengan Δx mendekati 0, dan $\Delta\alpha$ mendekati 0, koefisien arah garis singgung di P = tan $\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$. Jika lim ada maka tan $\alpha = \dfrac{dy}{dx} = Y'(x) = Dy(x) =$ derivatif pertama dari y ke x.

$y = f(x)$ maka $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

$\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x - 0} \left\{ \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right\}$ atau dy=f'(x) dx

y=f(x) maka $y' = \dfrac{df}{dx} = f'(x)$

<u>**Contoh :**</u>

$y = \sqrt[3]{1 - x^4} = (1 - x^4)^{1/3}$

Misal $u = 1 - x^4$ $\qquad \frac{du}{dx} = -4x^3$

$y = u^{1/3}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}u^{-2/3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}\left(1 - x^4\right)^{-2/3}\left(-4x^3\right)$

<u>**Definisi**</u>

1. misal fungsi f terdefinisi pada selang I yang bukan suatu titik. Fungsi f dikatakan mempunyai turunan pada selang I, jika turunannya (f') terdefinisi.
2. Derivatif pertama dari y = f(x) ke-x

   $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x - 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

   $= y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$

2.4.1 Rumus-rumus derivatif

Jika u, v, w fungsi dari x, a, b, c, n = konstan :

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}(cx) = c$
3. $\frac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1}$
4. $\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm ...)$

   $= \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm ...)$
5. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$
8. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

   $v \neq 0$
9. $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
10. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$
11. $\frac{du}{dx} = \frac{1}{dx/du}$

12. $\frac{d}{dx}=\frac{dy\!/\!du}{dx\!/\!du}$

13. $\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}$

14. $\frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\frac{du}{dx}$

15. $\frac{d}{dx}\tan u=\sec u^{2}\frac{du}{dx}$

16. $\frac{d}{dx}\cot u=-\csc^{2}u\frac{du}{dx}$

17. $\frac{d}{dx}\sec u=\sec u\tan u\frac{du}{dx}$

18. $\frac{d}{dx}\csc u=-\csc u\cot u\frac{du}{dx}$

19. $\frac{d}{dx}\sin^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\frac{du}{dx}$

20. $\frac{d}{dx}\cos^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\frac{du}{dx}$

21. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}u=\frac{1}{1+u^{2}}\frac{du}{dx}$

22. $\frac{d}{dx}\cot^{-1}u=\frac{-1}{1+u^{2}}\frac{du}{dx}$

23. $\frac{d}{dx}\sec^{-1}u=\frac{1}{u\sqrt{1-u^{2}}}\frac{du}{dx}$

24. $\frac{d}{dx}\sec cse^{-1}u=\frac{-1}{u\sqrt{1-u^{2}}}\frac{du}{dx}$

25. $\frac{d}{dx}^{a}\log u=\frac{1}{u\ln a}.\frac{du}{dx}$

26. $\frac{d}{dx}\ln u=\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$

27. $\frac{d}{dx}a''=a''\ln a\frac{du}{dx}$

28. $\frac{d}{dx}e''=e''\frac{du}{dx}$

29. $\frac{d}{dx}u^{v}=\frac{d}{dx}e^{vinu}=$

$e^{v\ln u}\frac{d}{dx}(v\ln u)=$

$e^{v\ln u}\left(\frac{v}{u}\right)\frac{du}{dx}+$

$e^{v\ln u}\ln u(1)\frac{du}{dx}=$

$vu^{v-1}\frac{du}{dx}+u^{v}\ln u\frac{dv}{dx}$

30. $\frac{d}{dx}\sinh u=\cosh u\frac{du}{dx}$

31. $\frac{d}{dx}\cosh u=\sinh u\frac{du}{dx}$

32. $\frac{d}{dx}\tanh hu=\sec h^{2}u\frac{du}{dx}$

33. $\frac{d}{dx}\coth u=-c\sec h\frac{du}{dx}$

34. $\frac{d}{dx}\sec hu=-\sec hu\tanh u\frac{du}{dx}$

35. $\frac{d}{dx}c\sec hu=-\sec hucthu\frac{du}{dx}$

36. $\frac{d}{dx}\sinh^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{u^{2}+1}}\frac{du}{dx}$

37. $\frac{d}{dx}\coth^{-1}u=\frac{1}{1+u^{2}}\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}u=\frac{\pm 1}{\sqrt{u^{3}+1}}\frac{du}{dx}$

38. $\frac{d}{dx}\tanh^{-1}u=\frac{\pm 1}{1+u^{2}}\frac{du}{dx}$

$-1 < u < 1$

39.

$\text{-}\, u > 1 \setminus / u < -1$

40. $\frac{d}{dx} \sec h^{-1} u = \frac{\pm 1}{\sqrt[u]{1+u^2}} \frac{du}{dx}$

41. $\frac{d}{dx} cesh^{-1} u = \frac{\pm 1}{\sqrt[u]{1+u^2}} \frac{du}{dx}$

Contoh :

1. f(x) = x sin x

   maka

   f'(x) = x cos x + 1.sin x

   = x cos x + sin x

2. f(x) = $2x^2+3x^2$ tan x, x ≠ 0, maka

   f'(x) = 4x + $3x^2$.$\sec^2$ x+6x tan x

   x ≠ 0

3. $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \neq 0$

   $f'(x) = \frac{x.\cos x - 1\sin x}{x^2}, x \neq 0$

4. $f(x) = 2x^5 - 3x^2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$, maka

   $f(x) = 10x^4 - 6x + x^{-2} - 6x^{-3}$

5. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}, x \neq -1$, maka

   $f'(x) = \{(-1)(1+x) - 1(1-x)\}/(1+x)^2$

Catatan :

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$

2.4.2. Turunan Fungsi Komposisi Atau Turunan Rantai

Komposisi fungsi

$$\left(f_0 g\right)^1(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

Atau rantai

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}.\frac{dv}{dw}.\frac{dw}{dx}$$

<u>Contoh :</u>

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x}$

Dibentuk $\quad f(x) = (g_o h)(x)$

$$= g(h(x))$$

$$g(x) = \sqrt{x} \qquad\qquad g(h(x)) = \sqrt{h(x)}$$

$$h(x) = 2x^2 + 3$$

Maka $\quad (g_0 h)^1(x) g'(h(x)).h'(x)$

$$h'(x) = 4x + 3$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} x^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f' x = \frac{1}{2\sqrt{h(x)}} h'(x)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 3x}}.4x + 3$$

Cara lain

$$u = 2x^2 + 3x$$

$$\frac{du}{dx} = 4x + 3$$

$$f(x) = y = \sqrt{u}\, y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$u = 2x^2 + 3x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{u}}.4x+3$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2x^2+3x}}.4x+3$$

2. f(x) = sin (tan x), maka

   f(x) = {cos(tan x)} sec^2x

3. $f(x) = \sec\frac{1-x}{1+x}, maka$

   $$f(x) = \left\{\sec\frac{1-x}{1+x}\tan\frac{1-x}{1+x}\right\}\left\{\{(-1)(1+x)-1(1-x)\}/(1+x)^2\right\}$$

2.4.3. Teorema Turunan fungsi Invers

Misal y = f(x)

$$x'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

Teorema turunan

Fungsi f(x) = x^r, r rasional

F(x) = x^r f'(x) = rx^{r-1}

Contoh :

Diberikan suatu fungsi $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-2x)} = (x^2-2x)^{2/3}$, maka

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-2x)^{-\frac{1}{3}}(2x-2)$$

$$= \frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2-2x}}, x \neq \{0,2\}$$

$$g(x) = \cos\sqrt[3]{\tan x} = \cos(\tan x)^{\frac{1}{3}}$$

$$g'(x) = -\sin(\tan x)^{\frac{1}{3}} . \frac{1}{3}(\tan x)^{-\frac{2}{3}} \sec^2 x = \frac{\sin\sqrt[3]{\tan x} . \sec^2 x}{3\sqrt[3]{\tan^2 x}}$$

$$x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, kbulat$$

Contoh :

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
2. $f(x) = \sqrt{x \sin x}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{\sin\sqrt{x}}$

Jawab :

1. f(x) $= \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} =$

f'(x) $= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-x}{1\_x}\right)^{\frac{1}{2}} . \dfrac{(-1)(1+x)-(1-x)1}{(1+x)^2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} . \left\{\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} . \frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$= -\frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)(1+x)^2}$$

$$= -\frac{1}{(1+x)^2 . \dfrac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}} - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

2. f(x) $= \sqrt{x \sin x} = (x \sin x)^{1/2}$

f'(x) $= \frac{1}{2}(x\sin x)^{-1/2}(1.\sin x + s\cos x)$

$\frac{1}{2}(x\sin x)^{-1/2}(\sin x + x\cos x)$

3. f(x) $= \sqrt[3]{\sin\sqrt{x}} = (\sin\sqrt{x})^{1/3}$

f'(x) $= \frac{1}{3}(\sin\sqrt{x})^{-2/3}.\cos\sqrt{x}(\frac{1}{2}x^{-1/2})$

$\frac{1}{6}x^{1/2}(\sin\sqrt{x})^{-2/3}.\cos\sqrt{x}$

Cari $\frac{dy}{dx}$ dari $x^3 + y^2 + x^2y^3 = 3$

Di (1,1)

$\frac{df(x,y)}{dx} \quad = 3x^2 + 2y\frac{dy}{dx} + 2xy^3 + 3y^2x^2\frac{dy}{dx} = 0$

$= 3 + 2\frac{dy}{dx} + 2 + 3\frac{dy}{dx} = 0$

Di (1,1) $\quad 5 + 5\frac{dy}{dx} + 0$

Jika diminta untuk mencari $\frac{dy}{dx}$, maka

$5\frac{dy}{dx}$ = - 5, maka $\frac{dy}{dx}$ = - 1

2.4.4. Mendeferensialkan Fungsi Implisit

Fungsi implisit adalah fungsi yang berbentuk f(x,y)=0 atau (f(x,y) = c. Maka cara mencari $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi implisit adalah sebagai berikut :

Untuk memudahkan pemahaman, maka akan langsung diberikan beberapa cara :

Contoh :

1. $x^2 + y^2 = 25$ (fungsi implisit)

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} =$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2. Jika $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

   Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$

   Di titik x = 3, y = 2

   - $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

     $$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 - 6\frac{dy}{dx} = 0$$

     $$(2y - 6)\frac{dy}{dx} = 2 - 2x$$

     $$2(y - 3)\frac{dy}{dx} = 2(1 - x)$$

     $$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{y - 3}$$

     $$di(3,2)\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{-1} = 2$$

   - $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1 - x}{y - 3}\right)$

$$= \frac{(y-3)(-1)-(1-x)(1)^{dy/dx}}{(y-3)^2}$$

$$= \frac{(3-y)-(1-x)^{dy/dx}}{(2-3)^2}$$

$$= \frac{(3-2)-(1-3).2}{(2-3)^2}$$

$$= \frac{1-(-2)^2}{1} = 5$$

3. $f(x,y) = x + xy^2 - x\sin y$

(atau, x + xy^2 = x sin y)

Cari $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$

2.4.5. Mendeferensialkan Fungsi Dengan Peubah Lebih Dari Satu

Secara umum jika diketahui z adalah fungsi dari u_1, u_2, u_3,... u_n, dan u_1, u_2, u_3,... u_n adalah fungsi dari x, maka :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u_1}.\frac{du_1}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u_2}.\frac{du_2}{dx} + ... + \frac{\partial z}{\partial u_n}.\frac{du_n}{dx}$$

$\frac{\partial z}{\partial u}$ = derivative parsiil pertama dari z ke u

artinya peubah lain kecuali u dianggap konstan

Contoh :

$$z = x^2 + y^3 + x^2y^3$$

$$\frac{dz}{dx} = z' = 2x + 3y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^3 + 3y^2x^2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 2x + 2xy^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = 3y^2 + 3y^2x^2$$

2.4.6. Mendeferensialkan persamaan bentuk parameter

$x = f(t)$
$y = g(t)$ t = parameter

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x-0}\frac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t}=\frac{\lim_{\Delta t-0}\Delta y/\Delta t}{\lim_{\Delta t-0}\Delta x/\Delta t}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{dy}{dx}=y'$$

Jika $\frac{dy}{dt}=\dot{Y}$ $\qquad y'=\frac{\dot{Y}}{\dot{X}}$ maka

$$\frac{dx}{dt}=\dot{X}$$

$$=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right).\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\frac{dx}{dt}d^2y/dt^2-\frac{dy}{dt}d^2x/dt^2\ \frac{1}{dx/dt}}{\left(dx/dt\right)^2}$$

$$=y''=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}\right)^3}\qquad\qquad y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Contoh :

1. $x=2-t$

   $y=t^2-6t-5$

   Maka $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

   $$\frac{dy}{dt}=\dot{y}=2t-6$$

   $$\frac{dx}{dt}=\dot{x}=-1$$

   $$y'=\frac{dx}{dt}=\frac{2t-6}{-1}=6-2t=2(2-t)+2$$

   $$=2x+2$$

   $$=2(x+1)$$

2. $x = t - \sin t \qquad 0 < t < \pi$

$y = 1 - \cos t$

$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = 1 - \cos t$

$\dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = \sin t$

$y' = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t} = \dfrac{\sin t}{y}$

Sin t dinyatakan dalam y

$y = 1 - \cos t$

$\cos t = 1 - y$

$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$

$\sqrt{1 - (1-y)^2} = \sqrt{1 - (1 - 2y + y^2)} \qquad (\sin^2 t + \cos^2 t = 1)$

$\sqrt{1 - 1 + 2y - y^2} = \sqrt{2y - y^2}$

$y' = \dfrac{1}{y}\sqrt{2y - y^2}$

2.4.7. Mendeferensialkan fungsi pangkat fungsi

Jika diketahui z = f(u,v)=u^v, dimana u, v adalah fungsi dalam x maka $\dfrac{df}{dx}$ dapat dicari dengan 2 cara :

1. $z = u^v$

$\ln z = \ln u^v$

$\ln z = v \ln u$

Diturunkan ke – x

$\dfrac{1}{z}\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dv}{dx}.\ln u + \dfrac{v}{u}\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{dz}{dx} = u^v\left(\dfrac{dv}{dx}\ln u + \dfrac{v}{u}\dfrac{du}{dx}\right)$

2. $z = u^v$

$$z = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$$

$$\frac{dz}{dx} = e^{v \ln u} \left(\frac{dv}{dx} \ln u + \frac{v}{u} \frac{du}{dx} \right)$$

$$u^v \left(\frac{dv}{dx} \ln u + \frac{v}{u} \frac{du}{dx} \right)$$

<u>Contoh :</u>

Diketahui z = x^x

Cara pertama :

$$z = x^x$$

$$\ln z = \ln x^x$$

$$\ln z = x \ln x$$

$$\frac{1}{z} \frac{dz}{dx} = 1.\ln x + \frac{x}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} = x^x (\ln x + 1)$$

Cara kedua :

$$z = x^x$$

$$z = e^{\ln X^X} \left(1 \ln x + \frac{x}{x} \right)$$

$$e^{\ln X^X} (\ln x + 1)$$

$$x^x (\ln x + 1)$$

BAB III
TERAPAN DERIVATIF

3.1 FUNGSI NAIK DAN TURUN

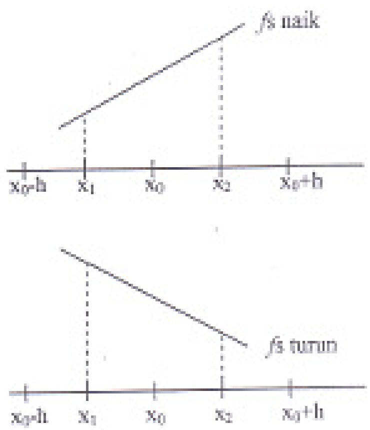
Definisi :

Suatu fungsi f(x) dikatakan naik di titik $x = x_0$, jika ditunjukkan bilangan pos kecil h sedemikian, sehingga untuk setiap titik tertentu $x_1 < x_2$ yang terletak dalam interval (x_0-h, x_0+h) berlaku $:f(x_1) < f(x_2)$.

Suatu fungsi f(x) dikatakan turun di titik $x = x_0$, jika ditunjukkan bilangan pos kecil h sedemikian, sehingga untuk setiap titik tertentu $x_1 > x_2$ yang terletak dalam interval (x_0-h, x_0+h) berlaku $:f(x_1) > f(x_2)$.

Untuk mempermudah pemahamannya diberikan skema pada gambar 3.1

Skema :



Gambar 3.1 Skema Fungsi naik dan fungsi turun

Dalil :

Jika $f'(x_0)>0$ ⇨ $y = f(x)$ naik di $x = x_0$

$f'(x_0)<0$ ⇨ $y = f(x)$ turun di $x = x_0$

$f'(x_0)=0$ ⇨ titik stasioner dari fungsi f tercapai.

$f''(x_0)<0$ ⇨ maka titik $(x_0, f(x_0))$ titik maksimum

$f''(x_0)>0$ ⇨ maka titik $(x_0, f(x_0))$ titik minimum

<u>Contoh :</u>

$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$

Tentukan semua ekstrim relatif dari fungsi *f*

Jawab :

$$f(x) \quad = 2x^4 - 4x^2 + 3$$

$$f'(x) \quad = 8x^3 - 8x$$

$$= 8x(x^2 - 1)$$

$$f''(x) \quad = 24x^2 - 8$$

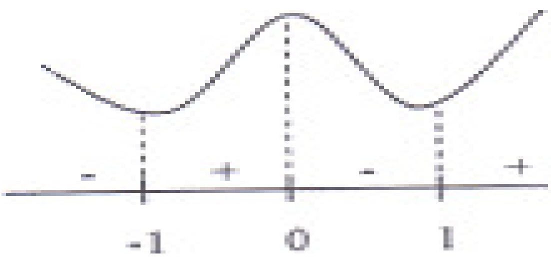
Titik stasioner tercapai jika f’(x)=0

$$f'(x) \quad = 8x(x^3 - 1) = 0$$

$$= 8x(x+1) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1$$

$$f(0) = 3; f(1) = 1; f(-1) = 1$$



f”(0) = -8<0 maka (0,3) titik maksimum

f”(1) = 16>0 maka (1,1) titik minimum

f”(-1) = 16>0 maka (-1,1) titik minimum

Sebelum mempelajari soal-soal lebih lanjut, akan diberikan terlebih dahulu teorema-teorema yang mendukung fungsi naik maupun fungsi turun.

Teorema Uji Keturunan Kedua untuk Kecekungan.

Misal *f* fungsi yang mempunyai turunan kedua selang I (terbuka)

1. Jika *f*”(x)>0 ⇨ Grafik *f* cekung ke atas pada I
2. Jika *f*”(x)<0 ⇨ Grafik *f* cekung ke bawah pada I

Definisi titik belok (Ekstrim)

f fungsi kontinu pada selang terbuka I $a \in I$, titik =(a, f(a)) dikatakan titik belok jika dipenuhi 2 syarat berikut :

1. Terdapat perubahan kecekungan dari grafik fungsi *f* disekitar $x = a$
2. Terdapat garis singgung pada grafik *fs f* di *(a,f(a))*

Contoh :

$$f(x) = 5x^3 - 3x^5 + 2$$
$$f'(x) = 15x^4 + 15x^2 = 0$$
$$x^2(15 - 15x^2)$$

a) Tentukan selang f cekung ke atas dan f cekung ke bawah
b) Tentukan semua titik ekstrimnya

Jawab :

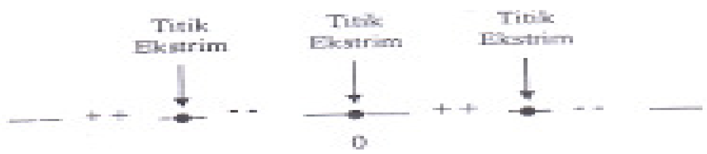
$$f(x) = 5x^3 - 3x^5 + 2, x \in R$$
$$f'(x) = 15x^2 - 15x^4, x \in R$$
$$f''(x) = 30x - 60x^3, x \in R$$

$$= -60x(x^2 - \frac{1}{2})$$

$$= -60x(x + \frac{1}{2}\sqrt{2})(x - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\qquad$ $x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$f(0) = 2$; $\qquad$ $f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 2 - \frac{7}{8}\sqrt{2}$; $\qquad$ $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 2 + \frac{7}{8}\sqrt{2}$



$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$x < -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\qquad$ $-\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < 0$ $\qquad$ $x > \frac{1}{2}\sqrt{2}$

(a) f cekung ke atas :

$\left(-n,-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$; $\left(0,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

f cekung ke bawah:

$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2};0\right)$; $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},n\right)$

(b) Karena f'’(x) ada di $x \in R$ dan disekitar $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ada perubahan kecekungan, maka titik ekstrimnya

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2},2-\frac{7}{8}\sqrt{2}\right);(0,2);\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},2+\frac{7}{8}\sqrt{2}\right)$$

<u>Teorema-teorema yang mendukung pembahasan diatas adalah :</u>

1. Teorema Rolle

Misalkan f memnuhi syarat :

(a) Kontinu pada selang tertutup *(a,b)*

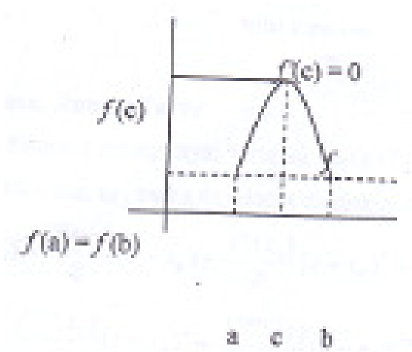
(b) Mempunyai turunan pada selang terbuka *(a,b)*

(c) f(a) = f(b)

maka terdapat suatu $c \in (a,b) \ni f'(c) = 0$

(Teorema ini menjamin adanya titik-titik pada grafik f(x) dimana f’(x)=0 atau garis singgung mendatar)

Skema :



Gambar 3.2. Skema Teorema Rolle

2. **Teorema nilai Rata-rata**

Misalkan f memenuhi syarat :

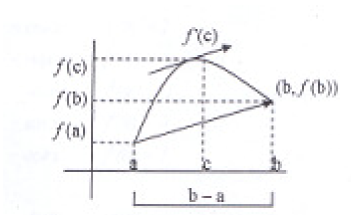
(a) Kontinu pada selang tertutup *(a,b)*

(b) Mempunyai turunan pada selang terbuka *(a,b)*

Maka terdapat suatu $c \in (a,b)$ sehingga $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

(Teorema ini menjamin adanya titik pada f yang garis singgung // dengan ruas garis yang menghubungkan titik *(a,f(a))* dengan *(b,f(b))*.

Skema :



Gambar 3.3 Skema Teorema

Nilai rata-rata

3.2 Teorema, Rumus Tayor

Misal fungsi f mempunyai turunan ke-(n+1) pada selang terbuka I yang memuat titik *x* dan x_0, maka *f(x)* dapat diuraikan dalam bentuk :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} + \ldots +$$

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

c terletak antara *x* dan x_0

Dapat ditulis

$F(x)=p_n(x)+R_n(x)$

Dimana :

$P_n(x)$ = suku banyak Taylor berderajad n

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)$

= suku sisa uraian Taylor

Contoh :

Deretkan dengan R Taylor *f(x)= sin x di* x_0*= 0*

Jawab :

$f(x)$	$= \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x)$	$= \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x)$	$= -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f^3(x)$	$= -\cos x$	$f^3(0) = -1$
$f^4(x)$	$= \sin x$	$f^4(0) = 1$
$f^5(x)$	$= \cos x$	$f^5(0) = 1$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!} + \dots \\
&= 0 + 1.x + 0 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + \dots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots
\end{aligned}
$$

Deret Taylor dimana $x_0 = 0$ dinamakan **Deret Mac Laurin**

<u>Contoh :</u>

Diket : $f(x)=x^3-9x^2+15x-5$

Tentukan semua titik ekstrimnya.

Jawab :

$F(x)=3x^2-18x+15$

Stasioner jika $f'(x)=0$, maka $3x^2-18x+15=0$ atau $x^2-6x+5=0$

Sehingga $(x-5)(x-1)=0$, $x_1=5$, $x_2=1$

$F''(x)=6x-18$, maka $f''(5)>0$, dan $f''(1)<0$

Jadi ekstrim minimum terjadi di titik (5,12) dan ekstrim maksimum di titik (1,-12)

3.3. Bentuk-bentuk Tidak Tertentu

Yang dinamakan bentuk-bentuk tak tertentu adalah bentuk-bentuk berikut :

$\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \; . \; \infty$; $\infty - \infty$; 1^{∞} ; 0^{0} ; ∞^{0}

Aturan dari *de l'* Hospital :

1. diketahui $f(x)$ dan $g\,(x)$ kontinu dan dapat dideferensialkan sebanyak n kali disekitar $x = a$:

   $$f(a) = f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$$
   $$g(a) = g'(a) = g''(a) = ... = g^{(n-1)}(a) = 0$$

   Sedang $f^{(n)}(a)$ dan $g^{(n)}(a)$ salah satu atau keduanya tidak nol, maka :

   $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

2. Kecuali untuk bentuk $\frac{0}{0}$, aturan dari *de l'* hospital bisa juga dipakai untuk bentuk $\frac{\infty}{\infty}$

   $$f(a) = f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = \infty$$
   $$g(a) = g'(a) = g''(a) = ... = g^{(n-1)}(a) = \infty$$

   Sedang $f^{(n)}(a)$ dan $g^{(n)}(a)$ salah satu atau keduanya tidak tak berhingga, maka :

   $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

Contoh :

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{2 - x} \to \frac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{2x - 1}{-1} = -3$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{\sin^2 x} \to \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x \cos x^2}{2 \sin x \cos x} \to \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x \cos x^2}{\sin 2x} \to \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2 \cos x^2 - (2x)(2x) \sin x^2}{2 \cos 2x}$$

$$= \frac{2.1}{2} = 1$$

3. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{3x^2 + 1} \to \frac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{6x} \to \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{6x}{x}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Contoh :

1. $\lim_{x \to \frac{\Pi}{2}} \frac{\ln(x - \Pi/2)}{\tan x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{x - \pi/2}}{\sec^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \pi/2}$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1/2 (\cos 2x + 1)}{x - \pi/2} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1/2 (-2 \sin 2x)}{1} = 0$$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{0}$ *tidak terdefinisi*

3. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x - 1}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

BAB IV
INTEGRAL

Integral adalah anti derivatif atau anti turunan. Rumus-rumus yang berlaku untuk derivatif tentu saja berlaku untuk integral dalam arti kebalikannya. Persoalan integral tidak hanya menggunakan rumus-rumus dasar yang merupakan kebalikan derivatif, akan tetapi perlu teknik-teknik yang cukup rumit yang akan dibicarakan berikut ini.

4.1. Dibawa ke Bentuk I : $\int df(x) = f(x) + c$

Contoh :

1. $\int dx = x + c$
2. $\int d\tan x = \tan x + c$
3. $\int d.u\sqrt{\ } = u.\sqrt{\ } + c$
4. $\int d.\ell nx = \ell nx + c$
5. $\int d.\ell^{x} = \ell^{x} + c$

4.2. Rumus Dasar Integral

$$\int U^{n} du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c, n \neq -1$$

Contoh :

$$\int x^{5} dx = \frac{1}{6} x^{6} + c$$

4.3. Dibawa ke Bentuk II :

$$\int \frac{du}{u} = \ell n|u| + c$$

$$\int \frac{f(x)}{f(x)} dx = \ell n|f(x)| + c$$

Catatan : $d(ax+b) = adx$

$$d(x \pm k) = dx$$

$$xdx = \frac{1}{2}(d(x^2 \pm a^2)$$

$$x^2 \pm ax + b = (x \pm \frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

Contoh :

1. $\int \frac{\cos ec^2 x}{\cot x} dx = -\int \frac{-\cos ec^2 x}{\cot x} dx$

   $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\cos ec^2 x$

   Sesuai bentuk $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

   Maka : $-\int \frac{-\cos ec^2 x}{\cot x} dx = -\ell n |\cot x| + c$

2. $\int (x+1)^n dx = \int (x+1)^n d(x+1)$

   Dengan rumus $\int u^n du, maka = \frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1} + c$

3. $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\int (ax+b)^n d(ax+b)$

   $= \frac{1}{a} . \frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1} + c$

4. $\int x\sqrt{ax^2+b}dx = \frac{1}{2a}\int \sqrt{ax^2+b}d(ax^2+b)$

   $= \frac{1}{2a}\int (ax^2+b)^{1/2} d(ax^2+b)$

   $= \frac{1}{2a} . \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(ax^2+b)^{3/2} + c$

   $= \frac{1}{3a}(ax^2 + b^{3/2} + c$

5. $\int \frac{e^x}{e^x+5}dx = \ln\left|e^x+5\right| + c$ (menggunakan rumus bentuk II)

4.4. Dibawa ke bentuk III

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\,\ell n\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$$

Contoh :

1. $\int \frac{dx}{x^2+3} = \int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + c$

2. $\int \frac{dx}{x^2-10x-25} = \int \frac{dx}{(x-5)^2-50} = \int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2-(\sqrt{50})^2}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{50}}\ln\left|\frac{(x-5)-\sqrt{50}}{(x-5)+\sqrt{50}}\right| + c$$

4.5 Dibawa ke bentuk IV :

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right| + c$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{a^2}{a}\sin^{-1}\frac{u}{a} + \frac{u}{2}\sqrt{a^2\pm u^2} + c$$

$$\int u^2 \pm a^2 du = \pm\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right| + \frac{u}{2}\sqrt{a^2\pm u^2} + c$$

Contoh :

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{6-(x+1)^2}} = \sin^{-1}\frac{(x+1)}{\sqrt{6}} + c$

2. $\int \sqrt{x^2+x+3}\,dx = \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}\,d(x+\frac{1}{2})$

$$= \frac{11/4}{2} \ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{11}{4}} \right| + \frac{x + 1/2}{2} \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{11}{4}} + c$$

4.6. Integral Parsial

u dan *v* merupakan fungsi dari *x* maka $duv = u\,dv + v\,du$

$$udv = duv - vdu$$

$$\int udv = \int duv - \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu \leftarrow$$

Contoh :

1. $\int \ln x dx = (\ln x)x - \int xd \ln x$

$$= x \ln x - \int x.\frac{1}{x} dx$$
$$= x \ln x - x + c$$

2. $\int xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int xde^{-2x}$

$$= -\frac{1}{2}\left(xe^{-2x} - \int e^{-2x} dx \right)$$
$$= -\frac{1}{2} xe^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) + c$$
$$= -\frac{1}{2} xe^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + c$$

4.7. Integral bentuk rasional

Bentuk umumnya dapat diberikan sebagai $H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, dimana P(x) adalah numetator, sedangkan Q(x) adalah denumerator. Jika P(x)>Q(x) maka P(x) harus dibagi Q(x) terlebih dahulu. Integral dengan bentuk rasional ini terdiri dari beberapa kasus, yang masing-masing akan dibahas dibawah ini.

Kasus 1:

Apabila faktor Q(x) semuanya linier dan berbeda.

Contoh :

$$\int \frac{(x-1)}{x^3 - x^2 - 2x} dx$$

$$\frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x-1}{x(x-2)(x-1)}$$

$$\frac{x-1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+1)}$$

$$\begin{aligned} x-1 &= A(x-2)(x+1) + B(x)(x+1) + C(x)(x-2) \\ &= A(x^2 - x - 2) + B(x^2 + x) + C(x^2 - 2x) \\ &= x^2(A+B+C) + (B-A-2C)x + (-2A) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ B-2C-A &= 1 \\ -2A &= -1 \\ A &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\frac{1}{2} + B + C = 0 \\ &B - \frac{1}{2} - 2C = 1 \\ &\Downarrow \\ &B + C = -\frac{1}{2} \\ &B - 2C = \frac{3}{2} \\ \hline &3C = -\frac{4}{2} \\ &C = -\frac{4}{6} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} + B + \left(\frac{-2}{3}\right) = 0$$

$$B = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4-3}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

Jadi $\int \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}dx \quad = \int \frac{1/2}{x}dx + \int \frac{1/6}{x-2}dx + \int \frac{-2/3}{x+1}dx$

$$= \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+1| + c$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{cx^3(x-2)}{(x+1)^4}\right|$$

Kasus 2 :

Jika semua akar riil dan ada yang sama.

Contoh :

$$\int \frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3}dx$$

$$\int \frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3}dx = \int \frac{A}{x^2} + \int \frac{B}{x} + \int \frac{C}{(x-2)^3} + \int \frac{D}{(x-2)^2} + \int \frac{E}{(x-2)}$$

$$x^3-1 \quad = A(x-2)^3 + Bx(x-2)^3 + Cx^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2(x-2)^2$$

$$x^3-1 \quad = (B+E)x^4 + (A-6B+D-4E)x^3 +$$

$$= (-6A+12B-C-2D+4E)x^2 + (12A-8B)x - 8A$$

$$A = \frac{1}{8}; B = \frac{3}{16}; C = \frac{7}{4}; D = \frac{5}{4}; E = \frac{-3}{16}$$

$$\int \frac{(x^3-1)}{x^2(x-2)^3}dx =$$

$$\frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x} + \frac{7}{4}\int \frac{dx}{(x-2)^3} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{3}{16}\int \frac{dx}{(x-2)}$$

$$= -\frac{1}{8x} + \frac{3}{16}\ln x + \frac{(-7)}{8(x-2)^2} - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{3}{16}\ln|x-2| + c$$

Kasus 3 :

Jika tidak semua akar riil dan yang tidak riil semuanya berbeda.

Contoh :

$$\int \frac{(x^2-2x-3)}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx \Rightarrow \left(\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{C}{(x-1)}\right)$$

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{C}{(x-1)}$$

$$A=\frac{9}{5}; B=\frac{7}{5}; C=-\frac{4}{5}$$

Jadi :

$$\int \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx = \int \frac{\cancel{9}\!/_{5}\,x + \cancel{7}\!/_{5}\,dx}{x^2+2x+2} - \int \frac{\cancel{4}\!/_{5}}{x-1}dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cancel{9}\!/_{5}\,x}{x^2+2x+2}dx = \frac{9}{5}\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+2} - \frac{9}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

Maka :

$$\int \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}dx = \frac{9}{5}\frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}dx - \frac{9}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} + \frac{7}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \frac{9}{10}\ln\left|x^2+2x+2\right| - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} - \frac{4}{5}\ln\left|x-1\right|$$

$$= \frac{9}{10}\ln\left|x^2+2x+2\right| - \frac{2}{5}\tan^{-1}(x+1) - \frac{4}{5}\ln\left|x-1\right| + \ln c$$

Kasus 4 :

Jika tidak semua akar riil dan akar yang tidak riil ada yang sama.

Contoh :

$$\int \frac{(x-2)}{x(x^2-4x+5)^2}dx \Rightarrow \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{D(2x-4)+E}{(x^2-4x+5}$$

$$\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B(2x-4)+C}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{D(2x-4)+E}{x^2-4x+5}$$

...dst

4.8. Integral Fungsi Trigonometri

1. $\int \sin axdx = \frac{1}{a}\int \sin axdax$

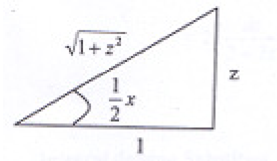
$$= -\frac{1}{a}\cos ax + c$$

2. $\int \sin^2 axdx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2axdx$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax + c$$

3. $\int \sin^n udu = \frac{-1}{n}\sin^{n-1} u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} udu$

4.9. Integral fungsi pecah rasional dalam Sin dan Cos



Subtitusi : tan $\left(\frac{1}{2}x\right) = z$

$$\frac{1}{2}x = \arctan z$$

$$Sin2x = 2Sinx\cos x$$

X = 2 arc tan z

$$= 2\tan^{-1} z$$

$$dx = \frac{2}{1+z^2}dz$$

$$Sin\ x = 2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x$$

$$= 2.\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.\frac{2z}{1+z^2}$$

$$Cos\ x = 2\cos^2\frac{1}{2}x - 1(Rumus : \cos^2\frac{1}{2}t = \frac{1+\cos t}{2})$$

$$Cos\ z = 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{2}{1+z^2} - \frac{(1+z^2)}{1+z^2} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

Contoh :

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+z^2}dz}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2dz}{1+z^2+2z+1-z^2}$$

$$= 2\int \frac{dz}{2+2z} = \int \frac{dz}{1+z} = \ln|1+z| + c$$

4.10. Integral dengan Subtitusi

Kasus 1 :

Apabila memiliki bentuk $\sqrt{a^2-u^2}$

$a > 0$

$a \le \theta \le {}^{II}\!/_{2}$ jika $u \ge 0$

$\frac{-1}{2} \le \theta < 0$ jika $u < 0$

$u = a\sin\theta \Rightarrow du = a\cos\theta d\theta$

Jadi $\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}$

$= \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}$

$= a.\cos\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Kasus 2 :

Apabila memiliki bentuk $\sqrt{u^2+a^2} = \sqrt{a^2+u^2}$

$a > 0$

$u = a\tan\theta \Rightarrow du = a\sec^2\theta d\theta$ jika $u \ge 0$

$a \le \theta \le {}^{II}\!/_{2}$

$$\frac{\pi}{2} \le \theta < 0 \qquad \text{jika } u < 0$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 + u^3} &= \sqrt{a^2 + (a^2 \tan^2\theta)} \\
&= a\sqrt{1 + \tan^2\theta} \\
&= a\sqrt{\sec^2\theta} \\
&= a\sec\theta
\end{aligned}$$

Kasus 3 :

Apabila memiliki bentuk $\sqrt{u^2 - a^2}$ a>0

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad \text{jika } u \ge a$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad \text{jika } u \ge a$$

$$u = a\sec\theta \Rightarrow du = a\sec\theta\tan t d\theta$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{u^2 - a^2} - \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} &= a\sqrt{\sec^2\theta - 1} \\
&= a\sqrt{\tan^2\theta} \\
&= a\tan\theta
\end{aligned}$$

Contoh-contoh kasus

1. $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx$

   Subtitusi : $x = 3\sin\theta \Rightarrow dx = 3\cos\theta d\theta$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int \frac{\sqrt{3^2 - 3^2\sin^2\theta}}{3^2\sin^2\theta}(3\cos\theta)d\theta \\
&= \int \frac{\sqrt{3^2 - 3^2\sin^2\theta}}{3^2\sin^2\theta} 3\cos\theta d\theta \\
&= \int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} d\theta \\
&= \int \cot^2\theta d\theta \\
&= \int \left(\cos ec^2\theta - 1\right) d\theta \\
&= -\cot\theta - \theta + c
\end{aligned}$$

2. $\int \sqrt{x^2+5}dx$

Subtitusi $: x = \sqrt{5}\tan\theta$

$dx = \sqrt{5}\sec^2\theta d\theta$

$$\sqrt{x^2+5} = \sqrt{5\tan^2\theta + 5}$$

$$= \sqrt{5}\sqrt{\tan^2\theta + 1}$$

$$= \sqrt{5}.\sec\theta$$

$$\int \sqrt{x^2+5dx} = \int \sqrt{5}\sec\theta\sqrt{5}\sec^2\theta d\theta$$

$$= 5\int \sec^3\theta d\theta \Rightarrow \text{dengan integral parsial}$$

$$= \frac{5}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{5}{2}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + c$$

3. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3^2}}$

Subtitusi $: x = 3\sec\theta$

$dx = 3\sec\theta\tan\theta d\theta$

$$\sqrt{x^2-3^2} = \sqrt{3^2\sec^2\theta - 3^2}$$

$$= 3\sqrt{\sec^2\theta - 1}$$

$$= 3\tan\theta$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-3^2}} = \int \frac{3\sec\theta\tan\theta}{3^3\sec^3\theta.3\tan\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{27}\int \frac{1}{\sec^2\theta}d\theta = \frac{1}{27}\int \cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{27}\int (1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{54}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + c$$

4.11. Subtitusi Aljabar

Subtitusi dilakukan sedemikian sehingga bisa merubah bentuk irrasional menjadi rasional.

Contoh : $\int \frac{dx}{(x-2)^{1/2}-(x-2)^{3/4}}$

Subtitusi : $(x-2) \quad = z^4$

$dx \quad = 4z^3 dz$

$(x-1)^{\frac{1}{2}} \quad = (z^4)^{\frac{1}{2}} = z^2$

$(x-2)^{\frac{3}{4}} \quad = (z^4)^{\frac{3}{4}} = z^3$

Maka :

$$\int \frac{dx}{(x-2)^{\frac{1}{2}}-(x-2)^{\frac{3}{4}}} = \int \frac{4z^3 dz}{z^2-z^3} = 4\int \frac{z^3}{z^2-z^3}dz$$

$$= 4\int \frac{z^3}{z^2(1-z)}dz = 4\int \frac{z}{(1-z)}dz$$

$$= -4\int \frac{z}{(z-1)}dz = -4\int \frac{z-1+1}{(z-1)}dz$$

$$= -4\int \left(1+\frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$= -4z - 4\ln\left|z-1\right| + c$$

$$= -4\sqrt{x-2} - 4\ln\left|\sqrt[4]{x-2}-1\right| + c$$

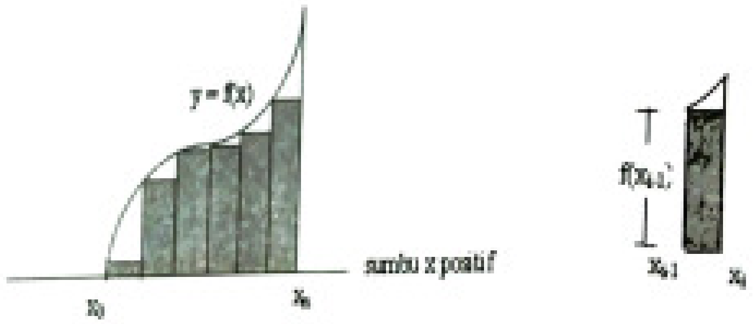
BAB V

TERAPAN INTEGRAL

Terapan Integral yang dibahas disini adalah:

1. Terapan integral dalam mencari Luas bidang datar.
2. Terapan integral dalam mencari Volume Benda Putar
3. Hubungan Luas dan Volume dengan Integral Ganda

5.1. Luas Daerah Bidang Datar



Gambar 4.1 Daerah yang dibatasi $y = f(x)$, garis $x=x_0$ dan $x=x_1$

Luas daerah di bawah kurva dapat dihitung dengan membuat garis-garis yang sejajar dengan sumbu Y, selanjutnya Luas daerah yang diarsir dapat dihitung dengan menjumlahkan semua bagian yang diarsir.

Sehingga Luas daerah diarsir $= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ dengan Δx adalah $x_i - x_{i-1}$ dan n adalah banyaknya daerah yang diarsir. Namun, luas yang diinginkan adalah luas daerah di bawah kurva yang berbentuk lengkung. Maka Luas bidang datar yang dibatasi oleh sumbu x positif, garis $x = x_0$ dan $x = x_n$, serta kurva $y = f(x)$ adalah

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

Contoh:

1. Tentukan Luas daerah A yang dibatasi kurva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ antara $x = -1$ dan $x = 2$ dan sumbu x positif!

   Solusi:

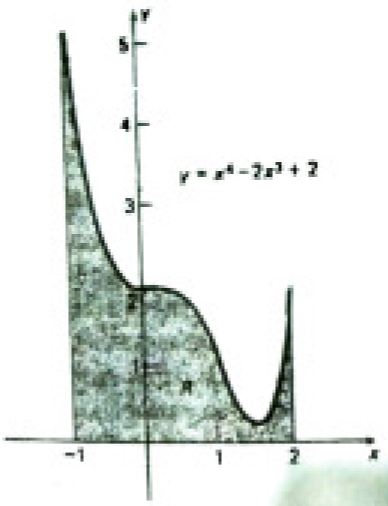
   Langkah-langkah yang harus dilakukan adalah:

   a. Gambarkan sketsa daerah yang bersangkutan

   b. Berikan nilai batas-batasnya sesuai dengan yang diketahui pada Gambar

   c. Cari luasnya dengan integral dan dengan batas-batas yang telah diketahui.

   Hasilnya adalah:

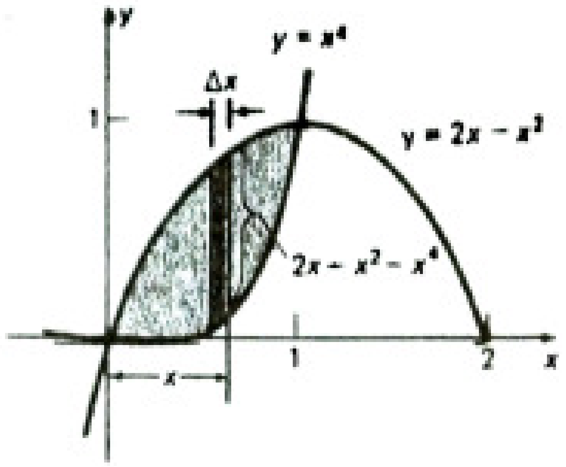


$$\text{Luas} = \int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} x^4 - 2x^3 + 2\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{51}{10} \text{ satuan luas}$$

2. Tentukan Luas daerah diantara kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$!

   Hasil sketsa grafiknya adalah:



Luas = $\int_0^1 (2x - x^2 - x^4)$ satuan luas

3. Tentukan Luas daerah antara kurva $y = x^2$ dan $x = y^2$! (penyelesaian diserahkan kepada mahasiswa).

Secara sama, dapat dicari juga Luas daerah yang mana garis-garis sejajar yang dibentuk sejajar dengan sumbu X, sehingga Luasnya dapat dinyatakan sebagai

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} g(y_i)\Delta y = \int_c^d g(y)\,dy$$

Apabila daerah yang dicari luasnya dibatasi oleh dua fungsi, maka rumus luasnya menjadi:

$$\int_a^b f_1(x) - f_2(x)\,dx$$

Untuk garis-garis yang sejajar dibuat sejajar dengan sumbu Y.

Sedangkan untuk garis-garis yang sejajar dengan sumbu X rumusnya menjadi:

$$\int_c^d g_1(y) - g_2(y)\,dy$$

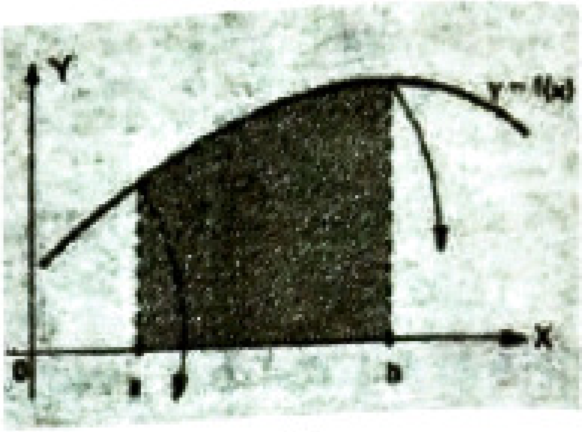
Contoh-contoh soal:

1. Gambarkan daerah R yang dibatasi oleh $y = x + 6$, $y = x^2$, dan $2y + x = 0$. Hitunglah luasnya. Petunjuk: Bagilah R menjadi dua bagian!
2. Dengan menggunakan integral, tentukan luas segitiga yang titik-titik sudutnya adalah (-1,4), (2, -2) dan (5,1)!
3. Sebuah benda bergerak di sepanjang suatu garis lurus sedemikian sehingga kecepatan pada saat t adalah $v(t) = 3t^2 - 24t + 36$ kaki per detik. Carilah perpindahan dan jarak keseluruhan yang ditempuh benda itu untuk $-1 \le t \le 9$!

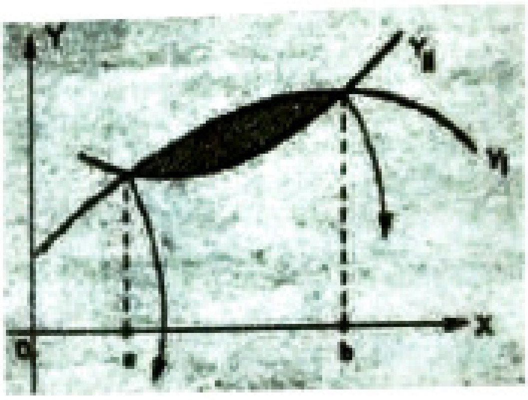
5.2. Volume Benda Putar

Integral dapat digunakan untuk mencari Luas. Hal ini tentu tidak mengherankan, karena integral memang ditemukan pada saat terdapat kesulitan untuk mencari Luas daerah pada bidang datar yang tidak beraturan. Namun ternyata integral juga dapat digunakan untuk banyak persoalan lainnya, antara lain mencari volume benda putar.

Gambar fungsi dan perputarannya terhadap sumbu X tampak pada Gambar 4.1.



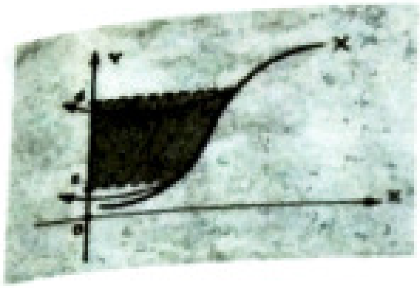
$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$



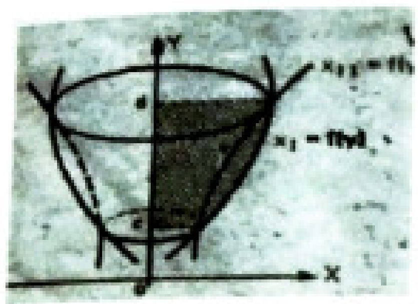
$$V = \pi \int_a^b (y_I^2 - y_{II}^2) \, dx$$

Gambar 4.1: Perputaran suatu fungsi mengelilingi sumbu X dan Volumenya

Volume benda putar dari fungsi yang diputar mengelilingi sumbu Y terlihat dalam Gambar 4.2



$$V = \pi \int_c^d x^2 dy$$



$$V = \pi \int_c^d (x_I^2 - x_{II}^2) dy$$

Gambar 4.2: Perputaran suatu fungsi mengelilingi sumbu Y

Contoh:

Carilah Volume benda putar dari parabol $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ diputar mengelilingi sumbu X!

Sesuai rumus dalam Gambar 4.1, maka

$$\text{Volume Benda Putar} = \pi \int_0^2 (8x - x^4)dx = \frac{48\pi}{5} \approx 30{,}16$$

Contoh:

Tentukan volume benda putar bila daerah yang dibatasi kurva $y = x^3$, sumbu X dan garis $y = 3$ diputar mengelilingi sumbu Y!

Maka sesuai Rumus pada Gambar 4.2,

Volume Benda Putar $= \pi \int_0 x^2 dy = \pi \int_0 y^{2/3} dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3} \right]_0 = \pi \frac{9\sqrt[3]{3}}{5}$

$\approx 11{,}76$

5.3. Integral Ganda

Telah diketahui bahwa integral $\int f(x)dx$ adalah untuk mencari luas yang dibatasi oleh fungi f(x) dan sumbu X, sedang untuk dua fungsi yang membatasi daerah yang dicari luasnya adalah $\int f_1(x) - f_2(x)dx$.

Dalam subbab ini diperkenalkan cara mencari luas dengan menggunakan integral ganda (*multiple integral*) sbb:

Luas $= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} dy\, dx$

dengan $y_1 = f_1(x)$ dan $y_2 = f_2(x)$, $x_1 = a$ dan $x_2 = b$

maka $\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} dy\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left((y)_2 - y_1\right)dx$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left((y)_2(x) - f_1(x)\right)dx$$

Yang sama dengan mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua fungsi yaitu $f_1(x)$ dan $f_2(x)$. Untuk daerah yang hanya memiliki batas satu fungsi dapat juga menggunakan rumus umum di atas karena fungsi yang lainnya adalah sumbu X sendiri yang tidak lain adalah f(x) = 0.

Secara analog, dengan analisa yang sama dengan rumus di atas, dapat juga dicari

Luas $= \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} dx\, dy = \int_{y_1}^{y_2} \left((x)_2 - x_1\right)dy$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \left(g_2(y) - g_1(y)\right)dy$$

Yang sama dengan mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua fungsi yaitu $g_1(y)$ dan $g_2(y)$. Untuk daerah yang hanya memiliki batas satu fungsi dapat juga menggunakan umum rumus di atas karena fungsi yang lainnya adalah sumbu Y sendiri yang tidak lain adalah g(y) = 0.

LATIHAN SOAL-SOAL

BAB I SAMPAI DENGAN BAB V

Latihan Soal Bab I

1. Tentukan hasil dari
   a. $(1 + x)^{-4}$
   b. $(1 - x)^{-4}$
2. Tentukan grafik persamaan berikut:
   a. $y^2 - x - 2 = 0$
   b. $4x^2 - 9y2 = 36$

Penyelesaian:

I. Menggunakan rumus Binomium Newton.

II. Menggunakan rumus-rumus grafik fungsi.

Latihan Soal Bab II

1. a) Jika diketahui :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x < -1 \\ x^2, & x \geq -1 \end{cases}$$

Selidiki kekontinuannya di x = -1!

b) Jika diketahui :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & x < 1 \\ 3x - 1; & 1 \leq x < 3 \\ x^2 + 1; & x \geq 3 \end{cases}$$

Selidiki kekontinuannya di x = 1 dan x = 3!

2. Tentukan $\frac{dz}{dx}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari:

$$z = x^3 + 2y^2 - 2xy^2 + 5x^2y \quad \text{dan} \quad z = x^3 \sin(y^2) - xy + y^2$$

3. Jika y= $\cos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ dan cari dy/dx!

Penyelesaian:

1. A). Diselidiki tiga syarat kekontinuan:

   a. $f(-1) = (-1)^2 = 1$

   b. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2 - x^2) = 1$

   $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} x^2 = 1$

   Limit kiri sama dengan limit kanan atau $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$ atau limit ada.

   c. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

   Ketiga syarat terpenuhi maka f(x) kontinu di x = -1.

   B). Diselidiki tiga syarat kekontinuan untuk x = 1

   a. $f(1) = (3.1-1)^2 = 2$

   b. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} ((x)^2 + 1) = 2$

   $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} 3x - 1 = 2$

   Limit kiri sama dengan limit kanan atau $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ atau limit ada.

   c. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

   Ketiga syarat terpenuhi maka f(x) kontinu di x = 1

Diselidiki tiga syarat kekontinuan untuk x = 3

a. $f(3) = (x^3+1) = 28$

b. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (3x - 1) = 8$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^3 + 1) = 28$

Limit kiri tidak sama dengan limit kanan atau limit tidak ada.

f(x) diskontinu (tidak kontinu) di x = 3.

$\frac{dz}{dx}, \frac{\partial z}{\partial x}$, dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dari:

$z = x^3 + 2y^2 - 2xy^2 + 5x^2 y \quad z = x^2 \sin(y^2) - xy + y^2$

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 + 4y\frac{dy}{dx} - 2\left(y^2 + 2xy\frac{dy}{dx}\right) + 5\left(2xy + x^2\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2y^2 + 10xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 4xy + 5x^2$$

$$z = x^3 \sin(y^2) - xy + y^2$$

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 \sin(y^2) + x^3 \cos(y^2)\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - y - x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \sin(y^2) - y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cos(y^2)(2y) - x + 2y$$

$y = \cos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ maka

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\sin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1/2} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2}$$

Latihan Soal Bab III

1. Diketahui $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + 2$, tentukan saat fungsi naik, turun, dan tentukan titik-titik ekstrimnya bila ada!
2. Carilah dengan menggunakan L'Hospital $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2}$!
3. Deretkan dengan deret Mac Laurin untuk e^x!

Penyelesaian:

1. $f'(x) = 15x^2 - 15x^4$

   Stasioner saat f'(x) = 0 atau $15x^2 - 15x^4 = 0$

   Sehingga $15x^2(1 - x^2) = 15x^2(1 + x)(1 - x) = 0$

   Sehingga $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, dan $x_3 = 1$.

   Diselidiki nilai-nilai diantaranya dan diperoleh

   $f'(-2) = 15(4) - 15\,16 < 0$, f(x) turun

   $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 15\left(\dfrac{1}{4}\right) - 15\dfrac{1}{16} > 0$, f(x) naik

   $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 15\left(\dfrac{1}{4}\right) - 15\dfrac{1}{16} > 0$, f(x) naik

   $f'(2) = 15(4) - 15(16) < 0$, f(x) turun

   Sehingga fungsi naik $\{x \mid -1, < x < 0, 0 < x < 1\}$

   fungsi turun $\{x \mid x < -1 \text{ dan } x > 1\}$

   Titik ekstrim minimum di (-1,f(-1)) dan ekstrim maksimum di (1,f(1))

2. $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2} = \dfrac{0}{0}$

   Dengan L'H, maka $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \dfrac{-1 + \dfrac{1}{x}}{3x^2 - 3} = \dfrac{0}{0}$

   Dengan L'H, maka $\lim_{x \to 1} \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{6x} = -\dfrac{1}{6}$

3. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$

Latihan Soal Bab IV

Hitunglah Integral berikut ini:

1. $\int x \cos 2x \, dx$
2. $\int \sec^3 x \, dx$
3. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2+6}}$
4. $\int \frac{dx}{x^2-4}$
5. $\int \frac{(x+4)}{x(x^2+4)} dx$
6. $\int \sec x \, dx$

Penyelesaian :

No 2. $\int \sec^3 x \, dx = \int \sec^2 x \sec x \, dx = \int \sec x \, d \tan x$

$$= (\sec)(x)\left(\tan(x) - \int \tan x \, d \sec x\right)$$
$$= (\sec)(x)(\tan x) - \int \tan x \sec x \tan x \, dx$$
$$= \left(\sec(x)(\tan x) - \int \tan^2 x \sec x \, dx\right)$$
$$= \left(\sec(x)(\tan x) - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx\right)$$

$$\int (\sec^3 x \, dx = \frac{1}{2\left((\sec x)(\tan x) + \ln\left|\sec x + \tan x\right|\right)} + C$$

Latihan Soal Bab V

1. Tentukan Luas daerah yang dibatasi sumbu X positif, sumbu Y positif, garis $y = x^2$ dan $y=2$!
2. Tentukan Luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^3$, $y = 0$, $x = -1$, dan $x = 2$! (penyelesaian diserahkan pada mahasiswa).

3. Tentukan luas daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$!

4. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah pada kuadran pertama yang terletak di atas parabola $y = x^2$ dan dibawah parabola $y = 2 - x^2$, diputar mengelilingi sumbu Y!

5. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh garis $y = 4x$ dan parabola $y = 4x^2$ diputar mengelilingi sumbu X. Gambarkan!

Penyelesaian:

1. $\int_0^{\sqrt{2}} 2 - x^2 dx = 2x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ satuan luas

2. Analog dengan no.1. (Perhatikan batas-batasnya)

3. Analog dengan no.1. (Perhatikan batas-batasnya)

4. Apabila dibuat gambarnya, maka tampak bahwa menggunakan jalur-jalur datar bukanlah pilihan yang terbaik (karena batas kanan terdiri atas bagian-bagian dari dua kurva, sehingga diperlukan dua integral). Sebaiknya digunakan jalur-jalur yang tegak:

$$V = 4\pi \int_0^1 (x - x^3)dx = 4\pi\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 4\pi\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \pi \approx 3{,}14$$

5. Dapat dikerjakan dengan contoh-contoh diatas.

BEBERAPA RUMUS INTEGRAL ELEMENTER

1. $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

2. $\int u^n\, du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$ dengan $n \neq -1$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int e^u u = e^u + C$

5. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

6. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u \, du = \sin u + C$

8. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

9. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$

10. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$

11. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$

12. $\int \tan u \, du = \ln |\sec u| + C$

13. $\int \cot u \, du = \ln |\sin u| + C$

14. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$

15. $\int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + C$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$

17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$

18. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u + a}{u - a} \right| + C$

19. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C$

Bentuk-bentuk yang lain seperti Trigonometri, Logaritma dan Eksponen, Balikan Logaritma, dan keanekaragaman yang lain dapat dilihat pada referensi yang terdapat pada daftar pustaka.

DAFTAR PUSTAKA

Kreyzig, E., 1983, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley and Sons, Inc, Canada.

Leithold, L., 1972, *The Calculus With Analitic Geometry*, Herper Internasional Edition, Jarper and Row, Publisgers, New York, Hagerstown, San Fransisco, London

Martono, K., 1970, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall., Englewood Cliffs, New Jersey.

Purcell, J. E., 1987, *The Calculus with Analytic Geometry*, 5th Edition, Prentice-Hall, Inc.

www.machinesinsight.com

www.directindustry.com

Dr. Hj. SRI ARTTINI DWI P, M.Si

Sri Arttini Dwi Prasetyowati adalah seorang Sarjana Matematika. Strata satu dan strata duanya dilalui di jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gadjah Mada Yogyakarta. Setelah menamatkan studi strata satunya, yaitu pada tahun 1989, ia memulai kariernya sebagai Software Specialist di PT Astra Graphia Jakarta, pada tahun 1990, selanjutnya pada tahun 1993 sebagai Programmer di Universitas Islam Sultan Agung Semarang, yang akhirnya membawanya menjadi staf pengajar di jurusan Teknik Elektro Fakultas Teknologi Industri Universitas Islam Sultan Agung Semarang sejak 1995. Program Magister diselesaikan pada tahun 1998, barulah pada tahun 2005 ia meneruskan studi Program Doktoral di jurusan Teknik Elektro Fakultas Teknik Universitas Gadjah Mada Yogyakarta. Ia ingin menerapkan ilmu Matematika yang ia dapatkan selama ini untuk Teknik Elektro. Gelar Doktor ia peroleh pada bulan Juni 2010. Wanita kelahiran Yogyakarta ini kini mengampu mata kuliah Matematika, lebih khusus Kalkulus I dan Kalkulus II di jurusan Elektro, Industri, Informatika, dan komputer, khusus untuk jurusan Teknik Elektro ia juga mengampu mata kuliah dengan konsentrasi Isyarat Elektronika.

Dr. Hj. SRI ARTTINI DWI P, M.Si

TEKNIK-TEKNIK DIFERENSIAL & INTEGRAL

Buku ini merupakan pengarah dan pengantar bagi mahasiswa dalam memahami teknik-teknik penyelesaian permasalahan matematis, yang berhubungan dengan diferensial dan integral. Untuk peningkatan kompetensi, diharapkan mahasiswa juga mengikuti contoh soal-soal yang dilaksanakan dengan bimbingan seorang asisten mahasiswa, serta berusaha meningkatkan diri diluar kelas. Buku ini diharapkan dapat memandu mahasiswa didalam melaksanakan kegiatan pembelajaran selain buku-buku referensi tentang diferensial dan integral yang ada. Saran dan kritik sangat penulis harapkan, mengingat buku ini masih sangat jauh dari sempurna.

ISBN. 978-602-8420-97-6