MISKONSEPSI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI SD DAN SOLUSINYA

Tim Penyusun : Imam Kusmaryono, S.Pd., M.Pd
Rida Fironika Kusumadewi, M.Pd,
Nuhyal Ulia, M.Pd.
Nila Ubaidah, M.Pd

Mengajar Matematika adalah tugas yang sulit dalam keadaan apa pun. Hal ini karena kompleksitas, karakteristik dan sifat Matematika itu sendiri. Seringkali, dalam pembelajaran Matematika terjadinya miskonsepsi yang menghambat perkembangan kognitif siswa. Oleh karena itu Guru harus memberikan penjelasan secara cermat diikuti dengan kesempatan yang menciptakan peluang agar siswa memahami dan menyerap ide-ide yang disajikan dengan jelas, sehingga siswa menjadi mahir dalam Matematika.

Buku ini disusun berdasarkan hasil temuan penelitian dan pengalaman dalam kegiatan pengabdian masyarakat. Masalah yang disajikan dalam buku ini disertai dengan solusinya, bukanlah untuk memberikan klaim-klaim ini bahwa yang satu benar dan yang lain salah. Buku ini disusun dengan tujuan mengatasi miskonsepsi pembelajaran matematika di sekolah dasar, serta untuk mengubah paradigma pembelajaran matematika sekolah yang konvensional dengan memberikan penggambaran yang lebih baik mengapa anak-anak perlu belajar matematika, bagaimana mereka mempelajarinya, dan bagaimana hal itu diajarkan kepada mereka secara efektif

SA PRESS
Sultan Agung Press

ISBN 978-623-7097-25-9
9 786237 097259

Imam Kusmaryono, dkk

MISKONSEPSI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI SD DAN SOLUSINYA

Imam Kusmaryono, Rida Fironika Kusumadewi,
Nuhyal Ulia, dan Nila Ubaidah

MISKONSEPSI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI SD DAN SOLUSINYA

Unissula Press

MISKONSEPSI PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI SD DAN SOLUSINYA

Penulis:
Imam Kusmaryono, S.Pd., M.Pd.
Rida Fironika Kusumadewi, M.Pd.
Nuhyal Ulia, M.Pd.
Nila Ubaidah, M.Pd.

UNISSULA PRESS

Miskonsepsi Pembelajaran Matematika di SD dan Solusinya

Penyusun: 1) Imam Kusmaryono, S.Pd., M.Pd
2) Rida Fironika Kusumadewi, M.Pd,
3) Nuhyal Ulia, M.Pd..
4) Nila Ubaidah, M.Pd.

Desain Cover: Muhammad Haryono, S.Pd., M.Pd
Editor : Dyana Wijayanti, Ph. D

Semarang: Unissula Press, 2019.
vii + 90 halaman;16 x 23 cm
ISBN 978-623-7097-25-9
Cetakan Pertama, Oktober 2019

Penerbit: Unissula Press
Jl. Kaligawe Raya Km. 4 Semarang 50112
Telp. (024) 6583584 Fax. (024) 6582455
Dicetak oleh : Sultan Agung Press
Jl. Kaligawe Raya Km. 4 Semarang 50112
Telp. (024) 6583584 ext. 302. Fax. (024) 6582455

PRAKATA

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Mengajar Matematika adalah tugas yang sulit dalam keadaan apa pun. Hal ini karena kompleksitas, karakteristik dan sifat Matematika itu sendiri. Saat awal belajar Matematika, siswa mempelajarinya sendiri dan atau mempelajarinya dari orang lain, terutama guru mereka. Seringkali, dalam pembelajaran Matematika terjadi miskonsepsi yang menghambat perkembangan kognitif siswa. Oleh karena itu Guru harus memberikan penjelasan secara cermat diikuti dengan kesempatan yang menciptakan peluang agar siswa memahami dan menyerap ide-ide yang disajikan dengan jelas, sehingga siswa menjadi mahir dalam Matematika.

Buku ini disusun berdasarkan hasil temuan penelitian dan pengalaman dalam kegiatan pengabdian masyarakat. Masalah yang disajikan dalam buku ini disertai dengan solusinya, bukanlah untuk memberikan klaim-klaim bahwa yang satu benar dan yang lain salah. Buku ini disusun dengan tujuan mengatasi miskonsepsi pembelajaran matematika di sekolah dasar, serta untuk mengubah paradigma pembelajaran matematika sekolah yang konvensional dengan memberikan penggambaran yang lebih baik mengapa anak-anak perlu belajar matematika, bagaimana mereka mempelajarinya, dan bagaimana hal itu diajarkan kepada mereka secara efektif.

Ucapan terima kasih disampaikan kepada pimpinan Universitas Islam Sultan Agung (Unissula), Kepala LPPM Unissula, dan bapak ibu dosen di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Unissula Semarang, atas segala bantuan dan partisipasinya sehingga dapat tersusun buku ini.

Wassalamu'alaiku Wr.Wb.

Semarang, Oktober 2019
Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Prestasi Matematika Siswa Indonesia

Matematika merupakan pelajaran yang memiliki peran penting dalam pembentukan kemampuan berpikir kritis, oleh karena itu harus dikuasai oleh siswa sejak dini, mulai tingkat sekolah dasar sampai perguruan tinggi (Ulfiana, Mardiyana, & Triyanto, 2019). Namun, hasil survey pada sepuluh tahun terakhir yang dilakukan oleh *Program for International Student Assessment* (PISA) di bawah *Organization Economic Cooperation and Development* (OECD) dan survey dari *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) menyebutkan bahwa prestasi siswa dalam belajar matematika di Indonesia terutama aspek kemampuan penalaran masih berada pada tingkat bawah dibanding beberapa negara yang disurvei di dunia (Kemendikbud, 2016; OECD, 2008).

Terkait rendahnya prestasi siswa Indonesia di bidang matematika, lemahnya kemampuan penalaran, kesalahan siswa dalam memahami konsep matematika dan penerapan aturan atau strategi yang tidak relevan menjadi penyebab utama. Akibatnya, akan menghambat pembentukan kemampuan berpikir kritis siswa. Telah banyak dilakukan penelitian yang berfokus pada analisis kesalahan siswa dalam pembelajaran matematika (Aliustaoğlu, Tuna, & Biber, 2018; Gooding & Metz, 2011; Ming, Eng, Foong, & Shien, 2017;

Mohyuddin & Khalil, 2016; Sarwadi & Shahrill, 2014). pertanyaan yang muncul pada tulisan ini adalah: Benarkah siswa menjadi subjek utama sumber kesalahan? Apakah guru terlibat sebagai faktor penyebab kegagalan siswa dalam pembelajaran matematika? Untuk menjawab pertanyaan itu, maka hasil penelitian ini menjadi sangat penting untuk menganalisis adanya miskonsepsi pengajaran matematika yang dilakukan para guru di sekolah dasar di Indonesia dan alternatif pemecahan masalah untuk menghilangkan miskonsespi.

1.2 Peran Guru dalam Pembelajaran

Guru mempunyai peran dan kedudukan kunci dalam keseluruhan proses pendidikan. Guru merupakan faktor utama keberhasilan siswa dalam belajar. Terlebih lagi di sekolah dasar guru wajib menguasai materi pengajaran dan mengembangkan metode pengajaran sesuai dengan mata pelajaran yang diajarkan (Anwar, 2012). Guru Sekolah Dasar memiliki tanggungjawab paling berat dalam tugas profesionalnya. Seorang guru sekolah dasar di Indonesia dituntut menguasai banyak mata pelajaran, antara lain: Bahasa, Matematika, Geografi, Sejarah, Seni Budaya dan Keterampilan. Oleh karena itu, tidak dipungkiri bahwa penguasaan pengetahuan (materi) beberapa mata pelajaran menjadi tidak maksimal.

Kompetensi guru sekolah dasar, di satu sisi guru menguasai mata pelajaran dan mahir dalam bidang pembelajaran Bahasa, tetapi di lain sisi, guru kurang menguasai dan tidak mahir dalam pembelajaran matematika. Jika guru tidak memiliki kemahiran matematis dalam pengajaran akan menghambat pencapaian tujuan pembelajaran, dan mempengaruhi disposisi positif siswa terhadap pembelajaran matematika (Kusmaryono, et al., 2019). Akibat ketidakmahiran guru dalam pengajaran matematika juga akan menimbulkan suatu kesalahpahaman konsep atau miskonsepsi.

Kesalahan konsep matematika oleh guru dalam pengajaran di sekolah dasar dapat berakibat terjadinya miskonsepsi atau kesalahan pengertian dasar yang berkesinambungan sampai terbawa ke tingkat pendidikan tinggi. Hal ini karena karakteristik materi pembelajaran matematika yang saling berkaitan dan berkesinambungan dengan materi lain. Untuk mempelajari salah satu topik matematika di tingkat lanjutan harus berdasarkan pada penalaran dari pengetahuan dasar atau pengetahuan prasyarat sebelumnya. Jika seseorang mengalami kesalahan konsep (miskonsepsi) matematika pada pembelajaran pertama dan tidak segera dibenahi, maka akan berdampak pada pembelajaran matematika selanjutnya (Flevares & Schiff, 2014).

Miskonsepsi mencakup pemahaman atau pemikiran yang tidak berlandaskan pada informasi yang tepat. Miskonsepsi terjadi karena kesalahan dalam mentransfer konsep dari informasi yang diperoleh ke dalam kerangka kerja. Sehingga konsep yang dipahami menjadi tidak sesuai dengan konsep yang sebenarnya. Guru secara alami membentuk ide dari pengalaman sehari-hari, tetapi tidak semua ide yang dikembangkan adalah benar sehubungan dengan bukti dalam disiplin yang diberikan. Selain itu, beberapa konsep matematika dalam area konten yang berbeda sangat sulit untuk dipahami. Bahkan guru, kadang-kadang dapat memiliki miskonsepsi tentang materi (Burgoon, Heddle, & Duran, 2010). Bagi mereka mungkin konsep sangat abstrak, berlawanan dengan intuisi atau cukup kompleks. Karenanya, pemahaman guru tentang konsep menjadi salah. Oleh karena itu, mengubah kerangka kerja guru merupakan kunci untuk memperbaiki miskonsepsi pengajaran matematika (Sullivan, 2011).

1.3 Permasalahan Miskonsepsi

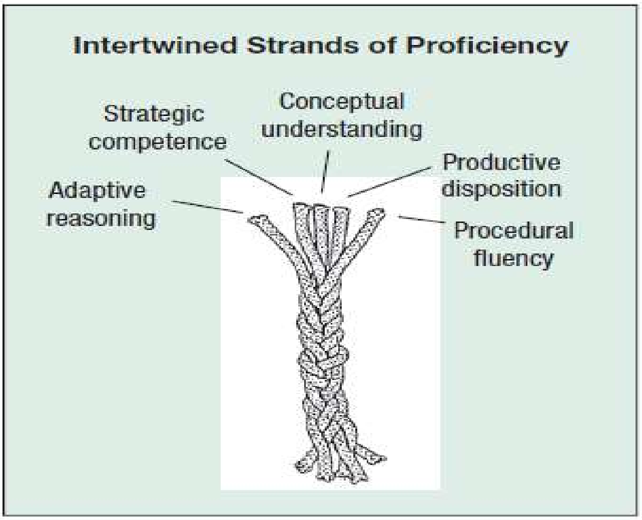
Buku ini menguraikan beberapa miskonsepsi pengajaran matematika di sekolah dasar. Dalam tulisan ini juga membahas jenis dan penyebab terjadinya miskonsespi dalam pengajaran matematika. Selain itu juga memberikan solusi alternatif pemecahan masalah agar kesalahan konsep (miskonsepsi) tidak terjadi lagi dalam pengajaran matematika. Pada dasarnya, s*etiap guru memiliki potensi untuk berhasil menjalankan tugasnya sebagai agen pembelajaran yang handal. Keberhasilan guru secara nyata dapat dilihat dari kemahiran mengajar dan keberhasilan siswa ketika mengikuti proses dan mencapai tujuan pembelajaran* (Kusmaryono, Ubaidah, Ulya, & Kadarwati, 2019). Ketika kami mencari literatur, kami menyadari ada kekurangan artikel penelitian yang menyelidiki tentang miskonsepsi (kesalahpahaman) guru dalam pembelajaran matematika di sekolah dasar. Oleh karena itu, penelitian ini dapat mengisi kesenjangan yang ada dan memberi manfaat bagi orang tua, guru dan siswa saat belajar matematika di Sekolah Dasar.

Buku Miskonsepsi Pembelajaran Matematika di Sekolah Dasar dan Solusinya, disusun berdasar hasil-hasil penelitian dan kinerja pengabagdian kepada masyarakat dari para dosen yang mana artikel hasil penelitian telah dipublikasikan melalui seminar dan jurnal ilmiah, diantaranya (1) Apakah Guru tidak pernah salah? Suatu studi kasus miskonsepsi pembelajaran matematika di SD (Kusmaryono et al., 2019); dan (2) Analisis Struktur berpikir siswa kelas IV Sekolah dasar dalam pembelajaran pembagian bilangan bulat (Kusumadewi, Kusmaryono, Jamallullail, & Saputro, 2019).

Masalah yang disajikan dalam buku ini disertai dengan solusinya, bukanlah untuk memberikan klaim-klaim ini bahwa yang satu benar dan yang lain salah. Buku ini disusun dengan tujuan mengatasi miskonsepsi pembelajaran matematika di Sekolah Dasar, serta untuk mengubah paradigma pembelajaran matematika sekolah yang konvensional dengan memberikan penggambaran yang lebih baik mengapa anak-anak perlu belajar matematika, bagaimana mereka mempelajarinya, dan bagaimana hal itu diajarkan kepada mereka secara efektif.

1.4 Standar Kemahiran Matematika

Kemahiran matematis adalah kualitas yang menunjukkan keahlian, kompetensi, pengetahuan, keyakinan, dan kelancaran dalam mengerjakan dan membelajarkan matematika serta menjadi pemecah masalah yang mahir dengan disposisi produktif yang tinggi (Groves, 2012; NRC: Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Penting bagi para guru untuk memahami, bahwa kemahiran matematis dalam mengajar akan mengubah peran mereka, dari seorang pentransfer pengetahuan aktif "*transfer knowledge*" yang hanya memberikan doktrin-doktrin kepada siswanya, menjadi seorang fasilitator yang mendorong siswa menjadi seorang konstruktor "*constructive knowledge*" (pembangun pengetahuan) bagi diri siswa sendiri (Kistner, et al., 2015). Perhatikan Gambar 3 Standar Kemahiran Matematika (NRC: Kilpatrick, Swafford & Findell 2001)



Gambar 1.1 Jalinan Standar Kemahiran Matematika

Menurut NRC (2001) kemahiran matematika terdiri dari lima jalinan interdependen (Gambar 3) yaitu meliputi: pemahaman konseptual, kelancaran prosedural, kompetensi strategis, penalaran adaptif, dan disposisi produktif.

Pemahaman konseptual didefinisikan sebagai "pemahaman konsep-konsep matematika, operasi, dan prosedur" (NRC: Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Indikator signifikan dari pengetahuan konseptual adalah mampu merepresentasikan situasi matematika dengan cara yang berbeda dan mengetahui bagaimana representasi yang berbeda dapat berguna untuk tujuan yang berbeda" (NRC, 2001). Dengan demikian pemahaman konseptual yang kaya dari seseorang adalah fungsi dari banyak koneksi ke representasi berbeda yang dia miliki. Misalnya, anggap bahwa 60% diberikan kepada siswa yang memiliki pemahaman konseptual yang kaya tentang persentase. Siswa mungkin tahu bahwa 60% adalah 60/100 yang sama dengan 30/100 + 30/100 atau sebagai 3/10 + 3/10 (atau 6/10) (atau 3/5). Dia mungkin bisa menghubungkannya dengan pengetahuannya tentang desimal dan melihat 60% sama dengan 0,60 yaitu 6/10 dan atau 60 perseratus (atau 600 perseribu). Semua hubungan ini dengan representasi berbeda membentuk pemahaman konseptual. Perlu dicatat bahwa representasi memungkinkan siswa untuk melihat konsep matematika abstrak dalam berbagai cara, yang ketika terstruktur dan terhubung secara intelektual mendukung pemahaman konseptual.

Dalam pemahaman konseptual, siswa harus disibukkan dengan pemahaman relasional - mengetahui apa yang harus dilakukan dan mengapa dibandingkan dengan pemahaman instrumental - mengetahui sesuatu dengan hafalan atau tanpa makna dan pemahaman relasional ini harus menjadi tujuan dari instruksi pembelajaran dalam matematika. Untuk mencapai pemahaman konseptual, siswa harus dibuat untuk melihat beberapa titik masuk dalam memecahkan suatu masalah. Pemahaman konseptual memungkinkan siswa untuk membangun pengetahuan baru ketika mereka membuat koneksi dengan pengetahuan yang telah dipelajari sebelumnya. Metode ini jauh lebih bermanfaat bagi siswa daripada menghafal fakta dan prosedur sederhana (MacGregor, 2013). Pemahaman konseptual mempromosikan retensi dan membantu perkembangan kelancaran (NRC, 2001).

Kefasihan atau kelancaran prosedural didefinisikan sebagai "pengetahuan tentang prosedur, pengetahuan tentang kapan dan bagaimana menggunakannya dengan tepat, dan keterampilan dalam melakukan secara fleksibel, akurat, dan efisien" (NRC, 2001, hal. 121). NCTM menjelaskan kelancaran prosedural sebagai "memiliki metode yang efisien, akurat, dan dapat digeneralisasikan (algoritma) untuk komputasi yang didasarkan pada sifat dan hubungan yang dipahami dengan baik" (NCTM, 2000). Pengetahuan prosedural yang dimaksud adalah setiap dan semua metode yang mungkin digunakan untuk memecahkan masalah matematika, termasuk (tetapi tidak terbatas pada) prosedur tertulis, prosedur mental, penggunaan komputer atau kalkulator, dan pemodelan dengan manipulatif (NRC, 2001). Penting untuk dicatat bahwa kelancaran prosedural tidak bertentangan dengan pemahaman konseptual; pada kenyataannya, keduanya bekerja sama untuk membantu meningkatkan kemampuan (kemahiran) matematika. Kelancaran prosedural tanpa pemahaman konseptual akan menghasilkan strategi yang tidak bermakna dan tidak pantas (tidak tepat) untuk diterapkan dalam memecahkan masalah; pemahaman konseptual tanpa kelancaran prosedural akan menghasilkan penerapan strategis yang tidak efisien (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001).

Menurut Ostler, siswa yang fasih secara prosedural seolah-olah mengembangkan kemampuan untuk mengevaluasi dan menyederhanakan berbagai ekspresi, memecahkan persamaan sederhana, dan merepresentasikan hubungan matematis dalam bentuk grafik (Ostler, 2011). Siswa yang tidak memiliki tingkat kelancaran prosedural yang memadai akan mencurahkan banyak sumber daya perhatian mereka untuk tugas perhitungan dasar dengan mengorbankan pengembangan pemahaman yang mendalam dari ide-ide matematika yang lebih kompleks (Ostler, 2011).

Kompetensi strategis didefinisikan sebagai "kemampuan untuk merumuskan masalah matematika dan menyelesaikannya" (NRC, 2001, hal. 124). Dalam hal yang sama, kompetensi strategis berkaitan dengan kemampuan seseorang untuk merumuskan masalah secara matematis dan kemudian menggunakan pengalaman matematika sebelumnya untuk menyelesaikannya. Memiliki kompetensi strategis memungkinkan seseorang untuk menguraikan strategi mana yang mungkin berguna dalam mengatasi masalah dan dalam menghubungkan strategi ini dengan pengalaman matematika sebelumnya.

Kompetensi strategis berguna tidak hanya di kelas matematika tetapi dalam mengatasi situasi kehidupan nyata yang bermasalah. Tidak seperti lingkungan kelas matematika, siswa di dunia nyata tidak memiliki konteks dengan prosedur yang jelas yang diperlukan untuk membantu mereka memutuskan bagaimana mendekati masalah. Di dunia nyata, siswa dihadapkan pada situasi yang mengharuskan mereka memahami sifat masalah, merumuskan model masalah, berpikir fleksibel dalam memilih strategi yang tepat, dan memecahkan masalah. Siswa yang tidak memiliki kompetensi strategis sering ketinggalan dalam pendekatan mereka terhadap masalah matematika; mereka kesulitan merumuskan model masalah dan tidak memiliki keterampilan yang diperlukan untuk secara fleksibel mengadopsi strategi yang tepat untuk memecahkan masalah.

Siswa yang tidak memiliki kompetensi strategis yang memadai akan sering mendekati masalah matematika dengan tujuan menggunakan strategi *trial and error*. Kompetensi strategis dapat dipelihara melalui paparan konstan terhadap masalah matematika yang mencerminkan situasi problematik kehidupan nyata. Masalah matematis yang menuntut siswa untuk memahami masalah, menyusun rencana, dan melaksanakan rencana untuk memecahkan masalah secara matematis mendorong pengembangan kompetensi strategis (Awofala, 2017).

Adaptive reasoning (penalaran adaptif) didefinisikan sebagai "kapasitas untuk berpikir logis tentang hubungan antara konsep dan situasi" (NRC, 2001, hal. 129). Kemampuan dalam penalaran adaptif memungkinkan seseorang untuk mempertimbangkan pendekatan alternatif, untuk mengikuti logika matematika dari bukti yang diajukan, untuk mencatat inkonsistensi logis atau kontradiksi, dan untuk membenarkan kesimpulan (Siegfried, 2012). Siswa dengan penalaran adaptif mampu membenarkan langkah-langkah solusi yang digunakan dalam memecahkan masalah dengan cara yang logis sedemikian rupa sehingga mereka tahu kapan langkah solusi salah atau benar. Siswa dikatakan mampu melakukan penalaran adaptif ketika mereka mampu berpikir logis tentang masalah yang ada, memperkirakan dan merefleksikan masalah dan memberikan justifikasi untuk menyelesaikan masalah.

Disposisi matematis produktif didefinisikan sebagai suatu keyakinan dan sikap seseorang tentang matematika yang mendukung kecenderungan untuk melihat matematika sebagai hal yang masuk akal, berguna, dan berharga. (Beyers, 2011; Feldhaus, 2014; NCTM, 2011; Sansome, 2016; Watson, 2015). Siswa dengan disposisi produktif memandang matematika sebagai sistem konsepsi yang terhubung yang dapat dipahami dengan ketekunan dan usaha yang tekun daripada melihat matematika sebagai seperangkat aturan sewenang-wenang yang harus diingat dan ditaati.

Disposisi produktif diperlukan untuk membangun empat untaian lainnya (pemahaman konseptual, kelancaran prosedural, kompetensi strategis, penalaran adaptif (NRC, 2001). Sementara empat hal lainnya (pemahaman konseptual, kelancaran prosedural, kompetensi strategis, penalaran adaptif) berurusan dengan proses kognitif seseorang dan berhubungan dengan pengetahuan konten matematika. Pengaruh keyakinan seseorang dan penguatan dari empat helai lainnya membantu membangun disposisi produktif seseorang. Dengan demikian, ada hubungan simbiotik antara disposisi produktif dan empat hal lainnya (pemahaman konseptual, kelancaran prosedural, kompetensi strategis, penalaran adaptif).

Siswa yang tidak memiliki disposisi produktif mungkin tidak melihat diri mereka sebagai pembelajar matematika dan ketekunan dalam matematika. Selain itu, siswa-siswa ini mungkin bahkan tidak berpikir bahwa matematika seharusnya masuk akal. Dapat dikatakan bahwa mengembangkan kemampuan matematika melibatkan kemampuan untuk terlibat dalam kebiasaan berpikir matematika yang mempromosikan tidak hanya kelancaran prosedural tetapi juga pemahaman konseptual, penalaran adaptif, dan kompetensi strategis dalam batasan matematika.

BAB II
MISKONSEPSI PEMBELAJARAN MATEMATIKA

2.1 Pengertian Konsep Matematika

Setelah memasuki sekolah, siswa mulai mengembangkan keterampilan matematika dasar mereka. Matematika memungkinkan bagi siswa untuk memecahkan masalah berbasis angka sederhana. Melalui penggunaan matematika, siswa dapat menghitung pembelian barang di toko, menentukan jumlah objek yang diperlukan dan menghitung jarak. Sementara disiplin matematika menjadi sangat kompleks, ada beberapa keterampilan matematika dasar yang dapat dan harus dipelajari setiap siswa selama program pendidikan matematika mereka.

Konsep merupakan salah satu dari objek **matematika**. Selanjutnya Gagne mengemukakan bahwa **konsep** dalam **matematika** adalah ide abstrak yang meyakinkan orang dapat mengklasifikasikan objek-objek atau kejadian-kejadian kedalam contoh atau bukan contoh dari suatu objek tertentu.

Konsep matematika adalah 'ide besar' matematika. Mengetahui konsep matematika berarti kita tahu cara kerja di balik jawaban. Kita tahu mengapa mendapatkan jawaban yang Kita dapatkan dan tidak perlu menghafal jawaban atau rumus untuk mencari jawabannya. Karena Kita tahu mengapa segala sesuatunya bekerja, Kita bisa mengetahui sendiri jawaban dan rumusnya. Kita memahami jawaban dan formula dengan lebih baik dan dapat mengetahui kapan ada sesuatu yang tidak beres.

Fakta matematika adalah sesuatu yang bisa dihafalkan atau ditulis. Misalnya, tabel perkalian dan penambahan adalah fakta matematika karena mereka memberi tahu kita bahwa faktanya adalah 1 + 1 = 2 dan 2 x 2 = 4. Tidak ada jika, dan, atau tetapi tentang mereka.

Mengetahui fakta matematika memungkinkan kita untuk mengingat kembali informasi saat membutuhkannya, seperti untuk ujian. Namun, jika kita diberi masalah yang serupa tetapi menggunakan angka atau pengaturan yang berbeda, maka kita tidak akan dapat melakukan masalah karena hanya tahu fakta dan bukan konsep di baliknya. Kita tidak tahu bagaimana masalahnya bekerja sehingga tidak bisa menyelesaikannya karena fakta yang kita tahu tidak termasuk masalah khusus itu. Mari kita bandingkan beberapa konsep matematika dan fakta matematika.

a) Perhitungan. Konsep matematika untuk menghitung memberi tahu kita bahwa berhitung mulai dari angka tertentu dan secara bertahap naik. Kita dapat memilih kenaikan sesuai kebutuhan. Fakta matematika untuk menghitung memberi kita melalui garis bilangan 1, 2, 3, 4, dll.
b) Penjumlahan (Penambahan). Konsep matematika penambahan memberitahu kita untuk mengumpulkan 2 jumlah atau angka

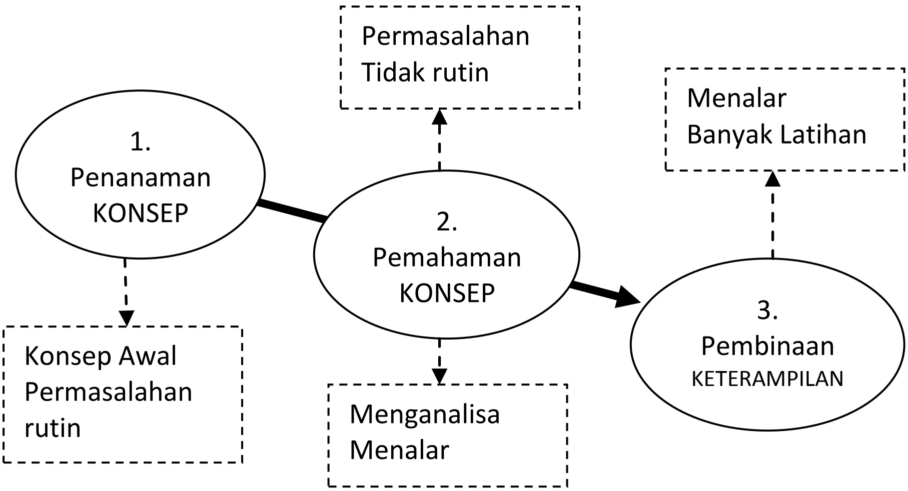
bersama dan mendapatkan totalnya. Fakta matematika adalah tabel tambahan yang memberi tahu 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, dll.

c) Perkalian. Konsep matematika perkalian memberi tahu kita untuk mendapatkan jumlah total atau jumlah tertentu yang telah disalin berkali-kali (dilipatgandakan). Faktanya adalah tabel perkalian.

d) Pembagian. Konsep matematika membagi adalah membagi secara adil. Faktanya matematika adalah tabel pembagian.

2.2 Pembelajaran Konsep Matematika

Di bawah ini disajikan skema tahapan pembelajaran konsep matematika di sekolah, yang mana akan membantu kita menjadi lebih baik dalam hidup menerapkan beberapa konsep matematika.



Gambar 2.1 Tahapan Pembelajaran Konsep Matematika

Memperhatikan Gambar 2,1 dapat dijelaskan bahwa tahapan pembelajaran konsep matematika diawali dengan tahap: (1) Penanaman konsep, melalui pengenalan konsep awal (dasar) dan diimplementasikan dalam permasalahn kontekstual yang rutin dalam kehidupan sehari-hari; (2) Pemahaman konsep, pada tahap siswa dibimbing untuk menganalisa dan menemukan persamaan dan perbedaan suatu objek melalui proses penalaran. Kegiatan ini dapat dimplementasikan dalam bentuk penyajian pemecahan masalah yang tidak rutin; dan (3) Pembinaan keterampilan, agar pemahaman konsep yang dimiliki oleh siswa semakin matang maka perlu dibina terus keterampilannya melalui banyak latihan memecahkan masalah. Ketika kita memahami konsep matematika, pada dasarnya kita telah mencapai tingkat atas dalam matematika yang memungkinkan untuk berpikir dan memproses secara abstrak.

Kegiatan untuk mengajarkan konsep dasar dapat dilakukan baik di rumah maupun di sekolah melalui beberapa cara di bawah ini.

(a) Libatkan siswa dalam aktivitas hidup sehari-hari di sekitar rumah atau ruang kelas. Misalnya, membantu menyingkirkan barang-barang (pernak-pernik) di baki yang terbagi dengan sampel di setiap bagian memberikan praktik dalam mencocokkan, menyortir, dan mengkategorikan; membantu menyortir berbagai ukuran handuk atau pakaian yang berbeda memberikan latihan tambahan dengan konsep-konsep ini.

(b) Beri siswa banyak kesempatan untuk menggunakan barang-barang sehari-hari untuk mencocokkan dan mengkategorikan: peralatan makan, alat perawatan, makanan, dan mainan untuk kegiatan; sepatu dan tali sepatu agar sesuai dengan ukuran atau panjangnya.

(c) Untuk mengerjakan seriasi, mintalah siswa mengatur sepatu milik keluarga atau anggota kelas dari yang terkecil hingga yang terbesar; sepatu juga bisa diatur ketinggiannya. Jenis kegiatan yang sama dapat dilakukan dengan barang-barang pribadi lainnya seperti ikat pinggang dengan panjang yang berbeda, buku-buku dengan ketebalan yang berbeda, karton susu dengan ukuran yang berbeda, atau nanti dengan menara Unifix (Hanoi) atau blok-blok kuisenair.

(d) Mengatur anggota keluarga atau anggota kelas untuk berbaris sesuai dengan ketinggian juga dapat membantu memfasilitasi pemahaman tentang seriasi.

(e) Berikan kesempatan bagi siswa untuk bekerja dengan konsep konservasi: berikan mereka bola atau kelereng dan biarkan mereka membaginya dalam jumlah yang lebih kecil sesuai keinginan mereka, dan kemudian gabungkan bentuk-bentuk yang lebih kecil untuk menunjukkan kekonstanan jumlah.

(f) Mintalah siswa melipat kain dan kertas untuk membuat berbagai bentuk. Kertas dapat dilipat untuk membuat segitiga atau yang lain. Nantinya, origami dapat digunakan untuk memfasilitasi pemahaman geometri.

(g) Mintalah siswa berjalan, melompat, berlari, melompati rintangan yang terbuat dari bentuk besar pada bingkai, tersedia dari beberapa katalog anak-anak, atau disusun dari benda-benda di lingkungan alam (misalnya, lompat 3 kali dalam lingkaran, lompat melewati persegi, lompat masuk dan keluar dari segitiga).

(h) Gunakan bentuk, ukuran, urutan, pola, pesawat, dan akhirnya angka dalam lingkungan kehidupan nyata (ruang kelas, rumah) untuk mengajarkan konsep (misalnya, membandingkan ukuran buku satu sama lain dan dengan ukuran meja, gunakan sudut ruangan untuk memperagakan sudut, dll.).

(i) Untuk mempraktikkan pemesanan posisi, mintalah seorang siswa berbaris di antara anak-anak lainnya dalam sebuah kelompok, dan kemudian identifikasi masing-masing sebagai yang pertama, kedua, ketiga,. . . terakhir. Mintalah siswa mengidentifikasi siswa mana sebelum atau setelah individu tertentu, yang berikutnya, dll.

Kegiatan yang dijelaskan di atas dapat digunakan sebagai keuntungan yang baik dalam membantu siswa meletakkan dasar untuk memahami konsep dasar pelajaran matematika.

2.3 Identifikasi Miskonsepsi

Penulis telah memiliki pengalaman sebagai guru sekolah dasar, guru matematika, dan fasilitator peningkatan professional guru telah memberikan banyak pengalaman untuk mengidentifikasi kesulitan-kesulitan guru dalam pembelajaran matematika. Serta pengalaman penulis sebagai guru di sekolah dasar selama duabelas tahun berinteraksi dengan siswa dan guru matematika di sekolah dasar. Hasil survey yang telah dilakukan penulis bersama teman dosen (peneliti) saat ini telah menghasilkan keprihatinan yang cukup serius terhadap terjadinya miskonsepsi pembelajaran matematika di sekolah dasar.

Beberapa kesalahan pembelajaran Matematika di kelas yang berhasil dicatat antara lain: (1) kesalahan pada pengenalan bilangan dan nilai tempat, (2) penyebutan bilangan pecahan decimal, (3) penyebutan bilangan bulat (positif, negative, minus, plus,) dan operasi bilangan bulat, (4) pengenalan konsep dan operasi aljabar, (5) konsep luas bangun datar dan penemuan rumusnya, (6) konsep volume bangun ruang dan penemuan rumus-rumusnya, dan lain sebagainya. Informasi terjadinya miskonsepsi pembelajaran matematika ini menjadi semakin penting ditindaklanjuti dengan solusi mengurangi dan atau menghilangkan miskonsepsi agar siswa dapat belajar lebih efektif.

Dengan latar belakang pengalaman kerja dan penugasan professional yang berbeda dari para guru kelas dan siswa sekolah dasar, penulis mengidentifikasi jenis kesalahan dan kesalahpahaman yang dibuat guru dan siswa serta menyelidiki kemungkinan penyebab kesalahan dan kesalahpahaman serta menyarankan langkah-langkah perbaikan untuk masalah yang dihadapi oleh siswa. Ketika prosedur yang diadopsi berbeda dari prosedur yang diterima (tindakan yang salah) konsepsi yang salah mungkin menghambat pemecahan masalah dan menghasilkan hasil yang tidak rasional. Kesalahan dari berbagai jenis dan karenanya sulit untuk diklasifikasikan secara akurat.

2.4 Kesalahpahaman: Makna dan Penjelasan

Penting untuk menetapkan perbedaan antara 'kesalahan' dan 'kesalahpahaman' karena keduanya tampaknya setara mengenai hasil yang salah yang mereka hasilkan. Kesalahan mungkin disebabkan karena kesalahpahaman. Faktor-faktor lain mungkin termasuk kecerobohan, masalah dalam membaca atau menafsirkan pertanyaan dan kurangnya pengetahuan tentang bilangan. Kesalahpahaman, di sisi lain, adalah hasil dari kurangnya pemahaman atau dalam banyak kasus penerapan yang salah dari 'aturan' atau generalisasi matematika. Ausubel percaya bahwa cara pengetahuan disajikan dapat mempengaruhi pembelajaran (Ojose, 2015).

Ide-ide tentang bagaimana siswa mengembangkan 'kesalahpahaman' ditekankan oleh sebagian besar studi empiris pada pembelajaran matematika selama beberapa dekade terakhir. Piaget pada akhir 1970-an menyatakan bahwa anak-anak berpikir tentang dunia dengan cara yang sangat berbeda daripada orang dewasa menghasilkan penelitian pendidikan, dan orang-orang mulai mendengarkan dengan cermat apa yang dikatakan dan dilakukan siswa pada berbagai tugas materi pelajaran. Sebenarnya siswa memiliki ide yang bersaing, seringkali cukup efektif, terhadap konsep yang disajikan di kelas. Siswa tidak datang ke sekolah sebagai papan tulis kosong. Mereka telah mengembangkan konsepsi yang tahan lama dengan kekuatan penjelas, tetapi konsepsi itu tidak konsisten dengan konsep ilmiah yang diterima dan disajikan selama pembelajaran.

2.5 Apa Kesalahpahaman dan Bagaimana Terjadi?

Miskonsepsi adalah kesalahpahaman dan salah tafsir berdasarkan salah makna (Ojose, 2015). Mereka disebabkan oleh kesalahan penafsiran dan instruksi sehingga menimbulkan konfik kognitif yang menghambat penalaran rasional seseorang. Menurut Novak menyatakan bahwa miskonsepsi merupakan suatu interpretasi konsep-konsep dalam suatu pernyataan yang tidak dapat diterima (Novak, 2011). Sementara itu, Brown (dalam Suparno, 2013:4) menyatakan bahwa miskonsepsi merupakan penjelasan yang salah dan suatu gagasan yang tidak sesuai dengan pengertian ilmiah yang diterima para ahli.

Menurut Ojose (2015), transisi sering menciptakan konflik kognitif siswa karena prosesnya menuntut pembebasan apa yang telah dipelajari sebelumnya. Penting untuk memahami bagaimana kesalahpahaman memanifestasikan berdasarkan pada sifat matematika sekolah (Ojose, 2015). Kesalahpahaman mengambil berbagai bentuk misalnya, beberapa siswa SD bahkan menengah siswa sekolah percaya bahwa 1/4 lebih besar dari 1/2 karena 4 lebih besar dari 2.

Selain itu, kesalahpahaman umum adalah bahwa operasi perkalian akan selalu meningkatkan angka. Ini menghambat siswa belajar tentang penggandaan angka positif dengan angka lebih kecil dari satu. Misalnya, aturan untuk menambahkan pecahan dengan penyebut berbeda. Perpindahan dari menambahkan pecahan dengan penyebut serupa (sama) ke menambahkan pecahan dengan penyebut yang berbeda mengharuskan siswa untuk memahami skenario yang berbeda dan melakukan penyesuaian. Menurut Ojose (2015), transisi ini sering menciptakan konflik kognitif siswa dan menimbulkan kebingungan terhadap apa yang telah dipelajari sebelumnya.

Dari sudut pandang siswa, peraturan tersebut mungkin tampak berubah dari satu konsep ke konsep lainnya. Sebagai contoh, ketika desimal diperkenalkan dengan tambahan, 0,5 + 0,9 sama dengan 1,4 (satu tempat desimal), tetapi dengan perkalian desimal, 0,5 × 0,9 sama dengan 0,45 (dua tempat desimal). Perbedaan dari penambahan ke perkalian dengan desimal bisa menjadi alasan bagi siswa untuk memiliki kesalahpahaman. Dimensi lain terkait dengan sifat matematika adalah metode-metode miskonsepsi tertentu dan kesalahan dalam perhitungan sebenarnya bisa mengarah ke solusi yang benar, mungkin alasan signifikan mengapa guru tampaknya berpegangan pada mereka (Ojose, 2015).

Kesalahpahaman dapat mempengaruhi secara negatif bagaimana konsep-konsep baru dalam bidang matematika dan sains dipelajari. Identifikasi awal kesalahpahaman adalah relevansi kritis untuk pengajaran yang efektif, tetapi menyajikan tugas yang sulit bagi guru karena mereka cenderung melebih-lebihkan atau meremehkan pengetahuan siswa sebelumnya (Bekkink, Donders, Kooloos, De Waal, & Ruiter, 2016).

Kesalahan konsep matematika oleh guru dalam pengajaran di sekolah dasar dapat berakibat terjadinya miskonsepsi atau kesalahan pengertian dasar yang berkesinambungan sampai terbawa ke tingkat pendidikan tinggi. Hal ini karena karakteristik materi pembelajaran matematika yang saling berkaitan dan berkesinambungan dengan materi lain. Untuk mempelajari salah satu topik matematika di tingkat lanjutan harus berdasarkan pada penalaran dari pengetahuan dasar atau pengetahuan prasyarat sebelumnya. Jika seseorang mengalami kesalahan konsep (miskonsepsi) matematika pada pembelajaran pertama dan tidak segera dibenahi, maka akan berdampak pada pembelajaran matematika selanjutnya (Flevares & Schiff, 2014).

Miskonsepsi mencakup pemahaman atau pemikiran yang tidak berlandaskan pada informasi yang tepat. Miskonsepsi terjadi karena kesalahan dalam mentransfer konsep dari informasi yang diperoleh ke dalam kerangka kerja. Sehingga konsep yang dipahami menjadi tidak sesuai dengan konsep yang sebenarnya. Guru secara alami membentuk ide dari pengalaman sehari-hari, tetapi tidak semua ide yang dikembangkan adalah benar sehubungan dengan bukti dalam disiplin yang diberikan. Selain itu, beberapa konsep matematika dalam area konten yang berbeda sangat sulit untuk dipahami. Bahkan guru, kadang-kadang dapat memiliki miskonsepsi tentang materi (Burgoon, Heddle, & Duran, 2010). Bagi mereka mungkin konsep sangat abstrak, berlawanan dengan intuisi atau cukup kompleks. Karenanya, pemahaman guru tentang konsep menjadi salah. Oleh karena itu, mengubah kerangka kerja guru merupakan kunci untuk memperbaiki miskonsepsi pengajaran matematika (Sullivan, 2011).

2.6 Tipe - Tipe Miskonsepsi

Berdasarkan analisis kesalahan subjek dalam menyelesaikan masalah dapat dikelompokkan tipe - tipe miskonsepsi yaitu: (1) *pre-conception*, (2) *undergeneralization*, (3) *overgeneralization*, (4) *modelling error*, (5) *prototyping error*; atau (6) *process-object error* (Ben-Hur, 2006).

Tipe 1: Pre-Conception

Pre-conseption merupakan kesalahan awal, sebelum seseorang memahami konsep dengan tepat. Kesalahan terjadi dalam pemahaman konsep awal, dan merupakan hal yang mendasar. Hal ini terjadi karena kesalahan dalam penafsiran dalam penanaman konsep, dan biasanya dilakukan oleh guru secara verbal.

Tipe 2: Undergeneralization

Undergeneralization merupakan bagian yang lebih spesifik dari *pre-conception*. *Undergeneralization* dinyatakan sebagai pemahaman yang terbatas dan kemampuan terbatas untuk menerapkan konsep-konsep. Pemahaman yang terbatas ini, menjelaskan berbagai keadaan mengenai pengetahuan guru pada saat seluruh ide-ide matematika berkembang.

Tipe 3: Overgeneralization

Overgeneralization adalah kasus miskonsepsi, dimana penerapan konsep kurang dapat dipahami dan aturan yang diterapkan dianggap tidak relevan. Biasanya untuk kasus tertentu permasalahan dapat dipecahkan dengan idea atau aturan yang dimiliki (individu) sendiri, namun belum dapat digenelralisasikan dalam memecahkan masalah yang bersifat lebih umum.

Tipe 4: Modelling Error

Modelling error teridentifikasi ketika individu hanya meniru contoh pengerjaan yang salah dari representasi matematis sebelumnya.

Seseorang gagal untuk dapat memberi alasan melalui pemodelan matematika yang ditampilkan.

Tipe 5: Process-Object Error

Process-object error teridentifikasi dalam kasus terjadinya kesalahan proses penyelesaian masalah. Salah satunya karena mereka tidak memahami hukum-hukum aljabar.

Tipe 6: Prototyping Error

Miskonsepsi yang digolongkan dalam *prototyping error* biasanya terjadi dalam masalah memahami kekekalan bentuk melalui contoh baku, misalnya gambar jajaran genjang. Di dalam pemeikiran mereka menganggap bahwa contoh baku sebuah konsep dianggap sebagai tipe contoh satu-satunya. Mereka tidak memahami definisi jajar genjang tetapi hanya memahami representasi melalui gambar visual baku.

2.7 Miskonsepsi Ontologis

Selama ini pengajaran matematika yang dilakukan oleh guru hanya mengikuti buku dan kebiasaan yang sudah berlaku bertahun-tahun lamanya tanpa adanya kontrol dan analisis prosedur pengerjaan, maka berpotensi besar terjadi kesalahan yang mengakar. Sehingga dapat diartikan bahwa pada kasus ini juga terjadi miskonsepsi yang mengakar (miskonsepsi ontologism) yaitu konsep pengajaran yang diyakini benar ternyata konsep pengajaran itu salah dan bersifat mengakar (Ben-Hur, 2006). Miskonsepsi ontologis dalam pengajaran matematika terjadi karena minimnya pengetahuan matematika dari guru sekolah dasar.

Mereka menjawab bahwa proses pengerjaan itu diperoleh karena keyakinan dan doktrin dari guru yang harus diikuti. Sebuah doktrin yang mereka terima begitu saja tanpa alasan, karena mereka mengganggap bahwa matematika adalah ilmu pasti dan guru tidak pernah salah. Cara penyelesaian itu ditiru oleh siswa tanpa mengetahui alasan langkah pengerjaannya.

Berdasarkan paparan hasil penelitian yang telah dibahas, dapat disampaikan bahwa hal-hal yang telah kita pelajari kadang-kadang tidak membantu dalam mempelajari konsep atau teori baru. Ini terjadi ketika konsep atau teori baru tidak konsisten dengan materi yang dipelajari sebelumnya. Dengan demikian, sangat umum bagi siswa, guru dan orang dewasa untuk memiliki miskonsepsi dalam domain yang berbeda (bidang pengetahuan konten).

Miskonsepsi dalam pengajaran matematika di sekolah dasar terjadi karena beberapa alasan yaitu (1) Guru umumnya tidak menyadari bahwa pengetahuan yang mereka miliki salah, dan (2) Guru menafsirkan pengalaman baru melalui pemahaman yang keliru, sehingga mengganggu kemampuan untuk memahami informasi baru dengan benar. Pemahaman konsep matematika yang keliru selama bertahun-tahun lamanya bersifat stabil, permanen dan mengakar (Desstya, Prasetyo, Susila, Suyanta, & Irwanto, 2019). Miskonsepsi yang bersifat stabil, permanen dan mengakar dalam pemikiran guru disebut "miskonsepsi ontologis". Miskonsepsi ontologis berhubungan dengan keyakinan ontologis yaitu, keyakinan tentang kategori dan sifat dasar dunia (Burgoon et al., 2010). Sehingga, patut diduga bahwa miskonsepsi yang dimiliki siswa berawal dari “miskonsepsi ontologis” guru dalam pengajaran matematika di sekolah dasar.

Miskonsepsi cenderung sangat tahan terhadap pengajaran, karena pembelajaran memerlukan penggantian atau pengorganisasian kembali pengetahuan guru secara radikal. Miskonsepsi dapat diganti atau dihilangkan dengan mengubah kerangka kerja guru. Mengingat bahwa, pemahaman konsep baru yang diperoleh, bisa jadi mendukung, kurang tepat atau bahkan bertentangan dengan pehamanan konsep sebelumnya. Pernyataan ini didukung oleh pendapat Gooding dan Metz (2011) yang mengatakan “Ketika informasi datang mencapai lapisan luar celebral untuk dianalisis, otak akan mencoba untuk mencocokkan berbagai komponen dengan melihat kembali memori yang sudah ia ingat sebelumnya dengan ciri yang sama.”

BAB III

MISKONSEPSI DAN SOLUSI PEMECAHAN MASALAH

3.1 Miskonsepsi Bilangan Bulat

Permasalahan pertama merupakan masalah pemahaman terhadap symbol (+) dan (-) sebagai tanda operasi hitung atau nama bilangan bulat. Sebagian besar responden (guru atau siswa) memiliki jawaban yang sama dalam hal membaca kalimat matematika di bawah ini. Perhatikan duplikasi jawaban responden pada Gambar 1a.

Miskonsepsi	Solusi dari miskonsepsi
(a) 7 + (- 4) = 3 Dibaca : tujuh ditambah minus empat hasilnya sama dengan tiga.	(c) 7 + (- 4) = 3 Dibaca: tujuh ditambah negative empat hasilnya sama dengan tiga (positif).
(b) -10 – (-6) = -4 Dibaca: minus sepuluh dikurangi minus enam hasilnya sama dengan minus empat.	(d) -10 – (-6) = -4 Dibaca: negative sepuluh dikurangi negative enam hasilnya sama dengan negative empat.
Gambar 1a. Jawaban responden	Gambar 1b. Solusi alternatif

Untuk memperjelas informasi dari responden (R.02), marilah kita perhatikan kutipan wawancara berikut ini.

Peneliti : Mengertikah Anda, perbedaan symbol (-) sebagai tanda operasi hitung dan (-) sebagai nama bilangan bulat?

Responden (R.02)	:	Symbol (-) dibaca minus. Jadi symbol (-) dapat sebagai operasi hitung atau nama bilangan.
Peneliti	:	Dalam sistem bilangan bulat ditulis bilangan positif (4) dan bilangan negative (-4), tetapi tidak ada bilangan minus.
Responden (R.02)	:	Oh ya, ternyata berbeda. Sekarang saya memahami symbol (-) sebagai tanda operasi hitung dan (-) sebagai nama bilangan bulat negatif
Peneliti	:	Jadi (+) sebagai operasi hitung penjumlahan dibaca ditambah atau plus. (-) sebagai operasi hitung pengurangan dibaca dikurangi atau minus. (+) sebagai nama bilangan dibaca positif, dan (-) sebagai nama bilangan dibaca negative.

Hasil respon jawaban kuesioner dari 10 (sepuluh) pertanyaan yang diberikan kepada 30 (tiga puluh) guru (reponden), telah teridentifikasi dan ditemukan beberapa miskonsepsi terkait dengan pengajaran matematika di sekolah dasar. Miskonsepsi yang dilakukan oleh lebih dari setengah jumlah responden ada 3 (tiga) permasalahan yaitu permasalahan operasi hitung pada bilangan bulat, Nilai tempat dan operasi pembagian pada pecahan atau bilangan rasional. Berikut ini ditampilkan 6 (enam) contoh jenis miskonsepsi pengajaran matematika yang ditemukan. Miskonsepsi yang terjadi akan dibahas dan dicarikan solusi alternative guna menghindari atau mengurangi miskonsepsi dalam pembelajaran matematika.

Miskonsepsi 1: *Pre-Conception*

Permasalahan 1:
Tentukan hasil penyelesaian beserta caranya untuk kasus bilangan bulat di bawah ini :

(e) 15 + (- 4) = … .

(f) -10 – (-6) = … .

Miskonsepsi	Solusi dari miskonsepsi
(a) 15 + (- 4) = 15 – 4 = 11	(a) 15 + (- 4) = 15 – 4 = 11
(b) -10 – (-6) = -10 + 6 = -4	(b) -10 – (-6) = -10 – (-6) = -4
Gambar 1a. Jawaban responden (R.02)	Gambar 1b. Solusi alternatif

Sebagian besar responden memiliki jawaban yang sama dalam hal menyelesaikan operasi penjumlahan dan pengurangan pada bilangan bulat. Sepintas jawaban guru pada Gambar 1a tidak ada kesalahan dan jawabannya adalah benar. Namun, untuk pembelajaran operasi hitung pada bilangan bulat tersebut perlu mendapat koreksi. Perhatikan jawaban responden (R.02) dengan solusi alternative yang ditawarkan pada permasalahan (b) Gambar 1b.Untuk memperjelas informasi dari respon jawaban guru (R.02), marilah kita perhatikan kutipan wawancara berikut ini.

Peneliti	:	Bagaimana Anda menjelaskan Gambar 1a (b) terdapat perubahan tanda operasi hitung pengurangan (-) menjadi operasi hitung penjumlahan (+) ?
Guru (R.02)	:	Tanda negative (-) dikalikan dengan negative (-6) sehingga menjadi positif.
Peneliti	:	Tahukah Anda bahwa (-) adalah simbol operasi dan (-6) adalah nama bilangan negative.
Guru (R.02)	:	Oh ya, ternyata berbeda. Sekarang saya memahami masalah symbol (-) sebagai tanda operasi hitung dan (-) sebagai nama bilangan bulat negatif

Pada Gambar 1(a), 1(b), dan petikan wawancara dapat dinyatakan bahwa Guru telah salah menafsirkan suatu operasi penjumlahan bilangan bulat, dan gagal memberi interpretasi serta memaknai tanda minus (-) sebagai operasi hitung dalam (-6). Kedua tanda (-) dan (-6) oleh responden dimaknai sama. Padahal keduanya merupakan dua hal yang berbeda. Sedangkan permasalahan 15 + (- 4) = 15 – 4 = 11 diartikan bahwa menjumlahkan dua bilangan, sama dengan mengurangi suatu bilangan dengan lawan bilangan pengurangnya, begitupun sebaliknya.

Kasus miskonsepsi pada permasalahan Gambar 1a, dinyatakan bahwa guru dan siswa menghadapi *pre-conception* yaitu belum mampu membedakan antara antara symbol (+) atau (-) sebagai operasi hitung atau nama bilangan bulat. *Pre-conception* merupakan kesalahan awal, sebelum seseorang memahami konsep dengan tepat (Diyanahesa, Kusairi, & Latifah, 2018).

3.2 Miskonsepsi Nilai Tempat

Konsep pembelajaran nilai tempat adalah menentukan nilai tempat dari suatu angka berdasarkan posisinya pada bilangan tertentu. Hal ini merupakan konsep dasar dalam pembelajaran matematika. Oleh sebagian guru dan siswa konsep dasar nilai tempat ini dianggap sangat mudah dipahami. Namun dalam pembelajarannya agak sedikit rumit untuk pengembangan masalah kontekstual.

Miskonsepsi 2: *Undergeneralization*

Permasalahan 2:
Tentukan manakah yang benar dari persamaan nilai berikut.

(a) **729 = 7 ratusan + 2 puluhan + 9 satuan**
(b) **729 = 6 ratusan + 12 puluhan + 9 satuan**

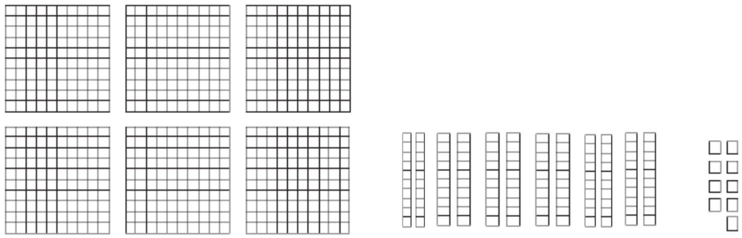
Memperhatikan hasil respon jawaban pada permasalahan 2, diperoleh data sebanyak 30 responden menjawab pernyataan (a) Benar. Sedangkan pernyataan (b) sebanyak 12 responden menyatakan Benar, dan 18 responden menyatakan Salah. Perhatikan wawancara terhadap responden (R.15) yang menjawab salah berikut ini.

Peneliti	:	Mengapa Anda menjawab bahwa pernyataann (b) adalah Salah?
Responden (R.02)	:	Permasalah ini berhubungan nilai tempat, jadi menggunakan aturan decimal harus tepat sebagai: satuan, puluhan dan ratusan.
Peneliti	:	Apakah pernyataan (b) nilainya tidak sama dengan 729?

Responden (R.02)	:	Hasilnya sama dengan 729, tetapi penulisan nilai tempatnya yang salah. Angka yang digunakan hanya 0 sampai 9.
Peneliti	:	Coba perhatikan. Jika ibu memiliki 6 lembar uang ratusan ribu, 12 lembar uang puluhan ribu, dan 9 koin uang ribuan. Berapakah nilai uang Ibu?
Responden (R.15)	:	Terdiam… dengan sedikit masih binggung.
Peneliti	:	= 6 ratusan ribu + 12 puluhan ribu + 9 ribuan = 600.000 + 120.000 + 9.000 = 729.000 Jadi nilai uang ibu Rp729.000,00

Memperhatikan petikan wawancara tersebut, jelaslah bahwa pada permasalahan nilai tempat telah terjadi miskonsepsi tipe *undergeneralization*. *Undergeneralization* merupakan bagian yang lebih spesifik dari *pre-conception*. *Undergeneralization* dinyatakan sebagai pemahaman yang terbatas dan kemampuan terbatas untuk menerapkan konsep-konsep (Saputri & Widyaningrum, 2016). Pemahaman yang terbatas ini, menjelaskan berbagai keadaan mengenai pengetahuan guru dan siswa pada saat seluruh ide-ide matematika berkembang. Hal ini terjadi karena guru kurang melatih siswa dengan contoh permasalahan kontekstual yang itdak rutin. Untuk memperjelas permasalahan 2 (b), perhatikan peragaan pada Gambar 2 di bawah ini sebagai solusi alternative dari miskonsepsi nilai tempat.

Solusi Miskonsepsi:
729 = 6 ratusan + 12 puluhan + 9 satuan



6 ratusan + 12 puluhan + 9 satuan

Gambar 2. Solusi Alternatif

Solusi alternative yang ditampilkan dalam Gambar 2 merupakan langkah yang juga tepat dan dapat dipilih sebagai intruksi pemecahan masalah sebagai bentuk pemikiran kritis siswa. Maka instruksi pada sistem nilai tempat harus mampu menjawab permasalahan dari *undergeneralization* karena ada anggapan jika ciri-ciri tertentu dalam sistem bilangan menghambat pemahaman umum (Yetim & Alkan, 2013).

3.3 Miskonsepsi Bilangan Rasional

Permasalahan untuk membuktikan bahwa 1,252525… adalah bilangan rasional menjadi suatu hal yang sangat penting untuk dijelaskan secara tuntas. Perhatikan duplikasi jawaban responden pada Gambar 3a.

Miskonsepsi	Solusi dari miskonsepsi
Jawaban : Bilangan 1,252525… . = $\frac{125}{100}$ bilangan rasional	Akan dibuktikan bahwa 1,252525… . adalah bilangan rasional. Misal: y = 1,252525… . dan 100y = 125,252525 … . maka $100y = 125,252525\ldots$ $y = 1,252525\ldots$ – $99y = 124$ $y = \frac{124}{99}$ Sehingga 1,252525… . = $\frac{124}{99}$ Jadi1,252525… . adalah bilangan rasional.
Gambar 3a. Jawaban responden (R.27)	Gambar 3b. Solusi alternatif

Hasil analisis kuesioner menunjukkan bahwa jawaban dari responden adalah salah. Berikut kutipan wawancara dengan salah satu responedent (R.27).

Peneliti	:	Mengertikah Anda, tentang bilangan ini 1,252525… . ?
Responden (R.27)	:	Bilangan 1,252525… ini adalah bilangan desimal berulang tak terhingga
Peneliti	:	Apakah bilangan 1,25 = 1,252525… . ?
Responden (R.27)	:	Ya, 1,25 ≠ 1,252525 … tetapi ini sulit dibuktikan dalam bilangan rasional.
Peneliti	:	Coba perhatikan solusi yang disajikan dalam Gambar 2b. Sekarang, Anda sudah mengerti?
Responden (R.27)	:	Ya, saya mengerti. Terima kasih atas penjelasannya.

Kasus pada bilangan rasional dan irrasional mungkin salah satu yang paling sering terjadi masalah pada pengajaran matematika di sekolah dasar. Banyak guru hanya memahami bilangan rasional sebagai bentuk pecahan biasa, pecahan decimal, dan persen. Bahkan, penafsiran pecahan sebagai hubungan bagian-keseluruhan hanya merupakan *subconcept* atau salah satu cara memahami bilangan rasional.

Penguasaan guru terhadap konsep bilangan rasional belum berkembang dengan sempurna, guru hanya memahami secara terbatas. Solusi alternative yang ditampilkan dalam Gambar 2b merupakan langkah yang tepat sebagai intruksi pemecahan masalah. Maka instruksi pada sistem bilangan harus mampu menjawab permasalah dari *undergeneralization* karena ada anggapan jika ciri-ciri tertentu dalam sistem bilangan menghambat pemahaman umum (Ben-Hur, 2006).

3.4 Miskonsepsi Pembagian Bilangan Pecahan

Pembelajaran materi pecahan di sekolah dasar mempunyai banyak problem. Bahkan siswa seringkali menyatakan sebagai materi yang sulit. Pengajaran operasi pembagian bilangan pecahan biasa (rasional) selalu menjadi perhatian yang serius dalam konteks procedural. Terdapat kejanggalan dalam proses penyelesaian masalah $\frac{4}{9} : \frac{1}{3} = \ldots$.

Miskonsepsi 3*: Modelling Error*

Miskonsepsi	Solusi dari miskonsepsi
$\frac{4}{9}:\frac{1}{3}=\frac{4}{9}x\frac{3}{1}=\frac{4x3}{9x1}=\frac{12}{9}$ $=1\frac{3}{9}=1\frac{1}{3}$ Terdapat perubahan tanda operasi pembagian menjadi operasi perkalian.	(a) $\frac{4}{9}:\frac{1}{3}=\frac{4:1}{9:3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ (b) $\frac{4}{9}:\frac{1}{3}=\frac{4}{9}:\frac{3}{9}=\frac{4:3}{9:9}=\frac{4:3}{1}=\frac{4}{3}$ $=1\frac{1}{3}$ Konsisten dan tidak terdapat perubahan tanda operasi
Gambar 4a. Jawaban responden	Gambar 4b. Solusi alternatif

Berdasarkan hasil kuesioner diperoleh bahwa jawaban guru untuk permasalahan tersebut adalah benar (lihat Gambar 4a). Namun, pemodelan matematika yang disajikan sebagai solusi permasalahan tidak dapat dijelaskan secara tepat diberikan alasannya. Berikut cuplikan wawancara untuk memperkuat pernyataan ini.

Peneliti	:	Mengapa $\frac{4}{9}:\frac{1}{3}$ pada saat Anda menyelesaikan operasi pembagian berubah menjadi operasi perkalian dan bilangan pembaginya dibalik menjadi seperti ini $\frac{4}{9}x\frac{3}{1}$?.
Responden (R.02)	:	Saya tidak dapat menjelaskan dengan tepat. Saya melakukan seperti yang saya pahami.

Peneliti	:	Apakah Anda yakin tidak ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?
Responden (R.02)	:	Saya yakin, tidak ada cara lain. Semua guru menyelesaikan soal ini seperti yang saya lakukan.
Peneliti	:	Sejak kapan Anda memahami cara penyelesaian seperti ini?
Responden (R.02)	:	Sejak saya belajar di sekolah dasar 25 tahun yang lalu. Saya mengikuti petunjuk guru dan saya melakukan sampai sekarang.

Modelling error teridentifikasi ketika siswa (guru) hanya meniru contoh pengerjaan yang salah dari representasi operasi hitung bilangan rasional. Pada pengajaran operasi pembagian bilangan rasional, guru gagal memberi alasan melalui pemodelan matematika yang ditampilkan. Contoh dalam permasalahan $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\ldots$ tersebut.

Pemodelan matematika yang disajikan sebagai solusi permasalahan tidak dapat dijelaskan secara tepat diberikan alasannya. Ternyata, cara penyelesaian dari responden (R.02) diperoleh dari guru mereka saat belajar di tingkat sekolah dasar. Mereka menjawab bahwa proses pengerjaan itu diperoleh karena keyakinan dan doktrin dari guru yang harus diikuti. Sebuah doktrin yang mereka terima begitu saja tanpa alasan, karena mereka mengganggap bahwa matematika adalah ilmu pasti dan guru tidak pernah salah. Cara penyelesaian ditiru oleh siswa tanpa mengetahui alasan langkah pengerjaannya (lihat Gambar 4a). Miskonsepsi seperti ini dikelompokkan sebagai kesalahan pemodelan matematika (*modelling error*) (Kusmaryono et al., 2019). Bandingkan dengan solusi penyelesaian masalah pada Gambar 4b, tampak bahwa solusi yang diajukan sangat logis dan konsisten sesuai dengan prinsip-prinsip matematika.

Beberapa jawaban guru dalam kuesioner menggambarkan bagaimana pemahaman yang terbatas tersebut merusak konsepsi kunci-kunci gagasan matematika. Ada pendapat yang menyatakan mungkin ketika guru mengalami kesalahan pemodelan, guru tersebut memiliki pemodelan versi dirinya sendiri pada situasi tersebut. Sehingga dapat diartikan bahwa pada kasus ini juga terjadi miskonsepsi yang mengakar, yaitu konsep pengajaran yang diyakini benar ternyata konsep pengajaran itu salah (miskonsepsi ontologis) (Ben-Hur, 2006).

Kesimpulannya:

Jika suatu pecahan dibagi dengan pecahan lain dan penyebutknya sama maka dapat langsung diselesaikan tanpa harus mengubah menjadi perkalian dan pecahan pembaginya dibalik. Sangat mudah bukan?. Perhatikan contoh di bawah ini.

(a) $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4:2}{9:3} = \frac{2}{3}$ → pembilang dan penyebut dapat dibagi

(b) $\frac{7}{12} : \frac{1}{6} = \frac{7:1}{12:6} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ →hanya penyebut yang dapat dibagi

Bagaimana dengan kasus $\frac{3}{10}:\frac{1}{4}=....$ → dimana penyebut tidak sama? Sebenarnya untuk penyelesaian ini tidak sulit. Seperti biasa telah banyak diajarkan oleh para guru di sekolah, yaitu:

$$\frac{3}{10}:\frac{1}{4}=\frac{3}{10}x\frac{4}{1}=\frac{12}{10}=1\frac{2}{10}=1\frac{1}{5}$$ → mudah bukan?!

Pertanyaan yang ada dibenak kita selama ini adalah Mengapa operasi perkalian pecahan harus diubah menjadi perkalian dan bilangan pecahan pembaginya harus dibalik? Inilah yang salama ini belum terjawab dan terjadi miskonsepsi dalam pembelajaran pembagian pecahan. Sebagian besar dari Mereka (Guru dan Siswa) tidak dapat memberi alasan yang kuat untuk menjawab pertanyaan tersebut. Ujung-ujungnya jawabannya adalah memang seperti itu, seperti yang diajarkan oleh guru saya di sekolah dasar. Untuk mendapatkan jawaban yang lebih baik dan tepat silahkan perhatikan penyelesaian di bawah ini.

$$\frac{3}{10}:\frac{1}{4}=\left(\frac{3}{10}x\frac{4}{4}\right):\left(\frac{1}{4}x\frac{10}{10}\right)=\frac{12}{40}:\frac{10}{40}=\frac{12:10}{40:40}=\frac{12:10}{1}=\frac{12}{10}=1\frac{1}{5}$$

Proses penyelesaian masalah memang agak panjang. Perlu diperhatikan bahwa proses itu dapat dijelaskan dengan baik, benar dan dapat dinalar dengan alasan yang akurat (Kusmaryono, dkk., 2019). Jadi sebenarnya ada proses menyamakan penyebut agar suatu pecahan dapat dibagi oleh pecahan lain. Seperti halnya yang berlaku pada operasi penjumlahan dan pengurangn bilangan pecahan. Namun, selanjutnya untuk keperluan pengkayaan atau drill menghadapi ulangan (UAS, UN) bapak ibu guru dan orang tua dapat mengajarkan secara singkat atau cepat dengan mengubah menjadi operasi perkalian dan pecahan pembaginya dibalik.

Miskonsepsi 4*: Overgeneralization*

Setelah siswa mengembangkan pemahaman yang kuat tentang bilangan, mereka mengeksplorasi bilangan pecahan atau bilangan yang terletak di antara seluruh digit. Umumnya penelitian ini dimulai di kelas satu dengan eksplorasi fraksi dasar termasuk ½ dan ¼. Setelah mempelajari pecahan, termasuk cara menambah, mengurangi, membagi, dan mengalikan bilangan non-utuh dalam bentuk pecahan, siswa mempelajari desimal. Pemahaman yang kuat tentang pecahan dan desimal sangat penting, karena siswa akan menggunakan bilangan tidak utuh ini secara ekstensif saat mereka melanjutkan belajar matematika mereka.

Pada kenyataannya, di lapangan masih banyak terjadi miskonsepsi verbalisme dalam proses pembelajaran pembagian bilangan kecil oleh bilangan yang lebih besar atau mengubah pecahan biasa menjadi pecahan decimal. Gambar 5a di bawah ini merupakan contoh pemahaman yang keliru dari pengajaran mengubah pecahan biasa menjadi pecahan decimal.

Miskonsepsi	Solusi dari miskonsepsi
Ubahlah pecahan biasa $\frac{1}{4}$ menjadi pecahan decimal. Solusinya dengan cara pembagian bersusun sebagai berikut: $\begin{array}{r} 0,25 \\ 4 \,\big/\, 10 \\ 8 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 0 \end{array}$ 2). ditulis Nol koma 1). Pinjam angka Nol 3). Pinjam angka Nol Jadi pecahan decimal dari $\frac{1}{4}$ = 0,25	Solusinya sebagai berikut: $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} x \frac{100}{100}$ $\frac{1}{4} = \frac{100}{4} \text{ x } \frac{1}{100}$ $\frac{1}{4} = 25 \text{ x } \frac{1}{100}$ $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$ $\frac{1}{4} = 0,25$ Jadi pecahan decimal dari $\frac{1}{4}$ adalah 0,25
Gambar 5a. Jawaban responden (R.11)	Gambar 5b. Solusi alternatif

Memperhatikan jawaban responden (R.11) bahwa bentuk desimal dari ¼ adalah 0.25 benar (lihat Gambar 5a). diidentifikasi bahwa proses pengajaran untuk mendapatkan hasil 0.25 dipandang kurang tepat. Selanjutnya dilakukan konfirmasi kepada responden (R.11) melalui wawancara berikut ini.

Peneliti	:	Mengapa Anda selalu menambahkan angka Nol (0) pada setiap bilangan yang tidak habis dibagi empat?
Responden (R.11)	:	Bilangan 1 kalau ditambah Nol (0) akan menjadi puluhan sehingga 10 dapat dibagi 4

Peneliti	:	Seharusnya, 1 + 0 = 1, tidak benar jika 1 + 0 = 10? Bagaimana Anda menjelaskan ini kepada siswa ?
Responden (R.11)	:	Saya mengetahui dari pengajaran matematika di sekolah sebelumnya. Jika suatu bilangan tidak dapat dibagi, maka meminjam Nol (0) dan hasil pembagian adalah Nol koma (decimal).
Peneliti	:	Apakah anda tidak sadar, bahwa telah terjadi kesalahan konsep dalam pembelajaran ini?
Responden (R.11)		Maaf, saya tidak dapat menjelaskan dengan tepat. Saya menyadari terjadi kesalahan pengajaran, karena selama ini, saya lakukan hanya mengikuti buku dan kebiasaan yang berlaku dan dilakukan oleh semua guru di sekolah.

Overgeneralization adalah kasus miskonsepsi, dimana penerapan konsep kurang dapat dipahami dan aturan yang diterapkan dianggap tidak relevan. Gambar 3a adalah contoh pemahaman yang keliru dari pengajaran mengubah pecahan biasa menjadi pecahan decimal.

Berdasarkan kutipan wawancara, terindikasi bahwa respondent (R.11) telah salah melakukan interpretasi yang tidak logis sehingga menyebabkan pemahaman yang keliru. Teknik penyelesaian suatu permasalahan matematika dapat berbeda-beda cara, namun interpretasi harus secara umum dapat dijelaskan atau dipahami oleh siswa (orang lain). Solusi pada Gambar 3b terlihat jelas bahwa dipilihnya strategi $\frac{1}{4}x\frac{100}{100}$, karena $\frac{100}{100}$ sama dengan 1. Sesuai dengan hukum aljabar bahwa semua bilangan jika dikalikan 1 nilainya tetap, sehingga diperoleh $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=0.25$

Melalui wawancara dengan respondent (R.11) diperoleh infromasi bahwa telah terjadi kesalahan (miskonsespsi) pengajaran matematika. Selama ini pengajaran matematika yang lakukan oleg guru hanya mengikuti buku dan kebiasaan yang sudah berlaku bertahun-tahun lamanya. Sehingga dapat diartikan telah terjadi miskonsepsi yang mengakar dimana konsep pengajaran yang diyakini benar ternyata konsep pengajaran itu salah (miskonsepsi ontologis) (Ben-Hur, 2006). Miskonsepsi ontologis dalam pengajaran matematika terjadi karena minimnya pengetahuan matematika dari guru sekolah dasar.

Pembagian dengan teknik porogapit

Pembagian dengan teknik porogapit merupakan teknik pembagian yang menjadi favorit dan andalan bagi guru dan siswa dalam menyelesaikan masalah pembagian terutama untuk bilangan besar. Namun dari segi peneliti, masih banyak guru yang mengajarkan teknik porogapit tersebut dalam semua hal yang berhubungan dengan pembagian. Parahnya, dalam penyampaian teknik porogapit ini guru kurang memperhatikan waktu (kapan) teknik ini tepat untuk disampaikan. Kemampuan prasyarat apa saja yang harus dikuasai oleh siswa sebelum menerima teknik ini. Apakah taraf perkembangan kognitif siswa sudah cukup baik untuk menerima “doktrin’ ini. Jadi ada kesan dipaksakan untuk dikuasai oleh siswa.

Banyak juga guru yang beranggapan bahwa apa yang mereka pikirkan hal perkara mudah juga merupakan hal yang mudah juga bagi siswa. Benarkah begitu? Bukankah perkembangan kognitif siswa berbeda dengan guru?. Oleh karena itu guru harus memahami perkembangan kognitif siswa sesuai tingkatan kelas, agar struktur kognitif siswa dapat berkembang dengan baik dan memiliki unit struktur kognitif yang semakin kaya (Kusumadewi et al., 2019).

Baiklah mari kita tinjau kembali pembelajaran pembagian bilangan melalui teknik porogapit sebagaimana contoh di bawah ini.

Cara 1 .

2928 : 6 = ...

```
6 / 2 9 2 8   = 4 8 8
    2 4         -
    -----
      5 2
      4 8       -
      -----
        4 8
        4 8     -
        -----
          0
```

- Permasalahan yang muncul:
- Mengapa pembagian dengan porogapit harus seperti itu?!
- Ada sesuatu yang kurang tepat saat langkah porogapit diterapkan ?! terkesan memaksa.
- Mendapatkan bilangan yang kelipatan 6 dan hasilnya mendekati 29 adalah sulit.
- Tidak semua siswa memahami teknik seperti itu, terutama siswa yang pemahaman konsep perkaliannya belum baik.

Cara 2.

$$6 \overline{)\,2928} = 400 + 80 + 8 = 488$$

$$\begin{array}{r} 2400 \\ \hline 520 \\ 480 \\ \hline 48 \\ 48 \\ \hline 0 \end{array}$$

- Alternatif pemecahan:
- Mengalikan 6 x 400 yang hasilnya mendekati nilai 29000
- Mengalikan 6 x 80 yang hasilnya mendekati nilai 520
- Mengalikan 6 x 8 yang hasilnya tepat 48
- Sehingga 400 + 80 + 8 = 488
- Jadi 2928 : 6 = 488

Cara 3.

$$6 \overline{)\,2928} = 300 + 100 + 80 + 8 = 488$$

$$\begin{array}{r} 1800 \\ \hline 1128 \\ 600 \\ \hline 528 \\ 480 \\ \hline 48 \\ 48 \\ \hline 0 \end{array}$$

- Alternatif pemecahan:
- Mengalikan 6 x 300 = 1800 yang bebas dari nilai 29000
- Mengalikan 6 x 100 = 600 yang bebas dari nilai 1120
- Mengalikan 6 x 80 = 480 yang bebas nilai 520
- Mengalikan 6 x 8 = 48
- Sehingga 300 +100 + 80 + 8 = 488
- Jadi 2928 : 6 = 488

Kesimpulan dari pembahasan ini adalah bahwa membagi suatu bilangan (besar) dengan cara porogapit atau pembagian bersusun harus disesuaikan dengan tarap perkembangan berpikir siswa. Cara 1 adalah hanya dapat dilakukan oleh siswa yang sudah memiliki abstraksi (berpikir formal). Cara 2 dan 3 dapat diajarkan untuk siswa-siswa yang daya abstraksinya belum tinggi (blum formal).

Mengubah pecahan biasa menjadi decimal

Mengubah pecahan biasa menjadi pecahan decimal sama artinya mencari nilai kesetaraan suatu bilangan dengan bilangan lain.

Pecahan decimal dari $\frac{1}{5}$	Pecahan decimal dari $\frac{1}{4}$	Pecahan decimal dari $\frac{3}{8}$
$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} x \frac{10}{10}$ $\frac{1}{5} = \frac{10}{5} \text{ x } \frac{1}{10}$ $\frac{1}{5} = 2 \text{ x } \frac{1}{10}$ $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ $\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} x \frac{100}{100}$ $\frac{1}{4} = \frac{100}{4} \text{ x } \frac{1}{100}$ $\frac{1}{4} = 25 \text{ x } \frac{1}{100}$ $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$ $\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{3}{8} = \frac{3}{8} x \frac{1000}{1000}$ $\frac{3}{8} = \frac{1000}{8} \text{ x } \frac{3}{1000}$ $\frac{3}{8} = 125 \text{ x } \frac{3}{1000}$ $\frac{3}{8} = \frac{125x3}{1000} = \frac{375}{1000}$ $\frac{3}{8} = 0{,}375$

3.5 Miskonsepsi Penyelesaian Persamaan Linier

Miskonsepsi 5*: Process-Object Error*

Process-object error teridentifikasi pada kasus (problem 5) penelitian ini yaitu terjadinya kesalahan proses penyelesaian dari persamaan linier satu variable.

Miskonsepsi	Solusi dari miskonsepsi
Tentukan: nilai x agar 2x + 5 = 17 benar $2x + 5 = 17$ $2x = 17 - 5 \rightarrow ???$ $2x = 12$ $x = \frac{12}{2}$ $x = 6$ jadi penyelesaian 2x + 5 = 17 adalah x = 6	Tentukan: nilai x agar 2x + 5 = 17 benar $2x + 5 = 17$ $2x+5+(-5)= 17+(-5) \rightarrow$ Langkah 1 $2x = 12$ $2x \cdot \frac{1}{2} = 12 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow$ langkah 2 $x = \frac{12}{2}$ $x = 6$ jadi penyelesaian 2x + 5 = 17 adalah x = 6
Gambar 6a. Jawaban responden (R.08)	Gambar 6b. Solusi alternatif

Jika kita perhatikan pada Gambar 4a, hasil respon jawaban adalah benar. Namun, proses penyelesaian pada langkah kedua di ruas kanan muncul operasi pengurangan dengan bilangan 5. Selanjutnya jawaban tersebut dikonfirmasi melalui wawancara di bawah ini.

Peneliti	:	Apakah proses penyelesaian yang Anda lakukan sudah benar?
Responden	:	Saya yakin, benar. Nilai x = 6
Peneliti	:	Mengapa pada langkah kedua 2x = 17 – 5, seperti ini?
Responden (R.08)	:	Bilangan positif 5 pada ruas kiri dipindah ke ruas kanan menjadi negative (-5).

Process-object error teridentifikasi dalam kasus (problem 5) yaitu terjadinya kesalahan proses penyelesaian dari persamaan linier satu variable. Jika kita perhatikan pada Gambar 6a, hasil akhir jawaban responden adalah benar. Namun, proses penyelesaian pada langkah kedua di ruas kanan muncul operasi pengurangan dengan bilangan 5. Konfirmasi yang dilakukan melalui wawancara, beberapa guru sangat yakin dan percaya bahwa proses penyelesaian persamaan linier satu variable diselesaikan seperti Gambar 6a. Mereka percaya bahwa bilangan positif yang berada di ruas kiri jika dipindah ke ruas kanan akan berubah menjadi bilangan negative. Jadi dapat disimpulkan bahwa mereka tidak memahami hukum-hukum aljabar.

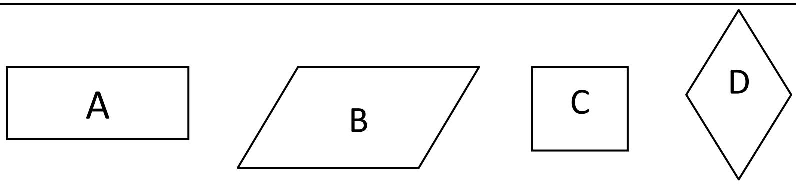
Solusi alternative pada Gambar 6b adalah proses terbaik untuk menyelesaikan persamaan linier satu variable. Langkah pertama, kedua ruas mendapat perlakuan yang sama yaitu ditambah dengan bilangan yang sama (-5), sehingga tetap memiliki nilai yang sama. Langkah kedua, mengalikan kedua ruas dengan bilangan yang sama yaitu (½) untuk menghilangkan koefisien x atau agar koefisien x adalah satu.

3.6 Miskonsepsi Bangun Datar

Miskonsepsi 6: P***rototyping Error***

Permasalahan miskonsepsi ini muncul ketika guru dihadapkan pada gambar bangun datar segiempat. Guru diminta untuk menunjukkan nama bangun jajaran genjang.

Pertanyaan: Bangun segiempat manakah yang merupakan jajaran genjang?



Jawaban responden:
Model B adalah jajaran genjang. Model A, C, dan D adalah bukan jajaran genjang.

Gambar 3.1 Model Bangun Segiempat

Hasil jawaban responden menyatakan bahwa hanya satu dari empat gambar yang tersedia yaitu Gambar B (lihat Gambar 6) yang dianggap sebagai jajaran genjang. Selanjutnya dilakukan konfirmasi kepada responden (R.02) melalui wawancara berikut ini.

Peneliti	:	Mengapa Anda memilih gambar B sebagai jajaran genjang?
Responden (R.02)	:	Karena, gambar B memiliki sisi miring yang sejajar
Peneliti	:	Mengapa gambar A, C atau D, bukan jajaran genjang?

Responden (R.02)	:	A adalah persegi panjang, C adalah persegi, dan D adalah belahketupat.
Peneliti	:	Jelaskan definisi jajaran genjang
Responden (R.02)	:	Jajaran genjang adalah segiempat yang memiliki dua pasang sisi berhadapan sama panjang, terdapat sisinya miring, dan sudutnya sama besar.

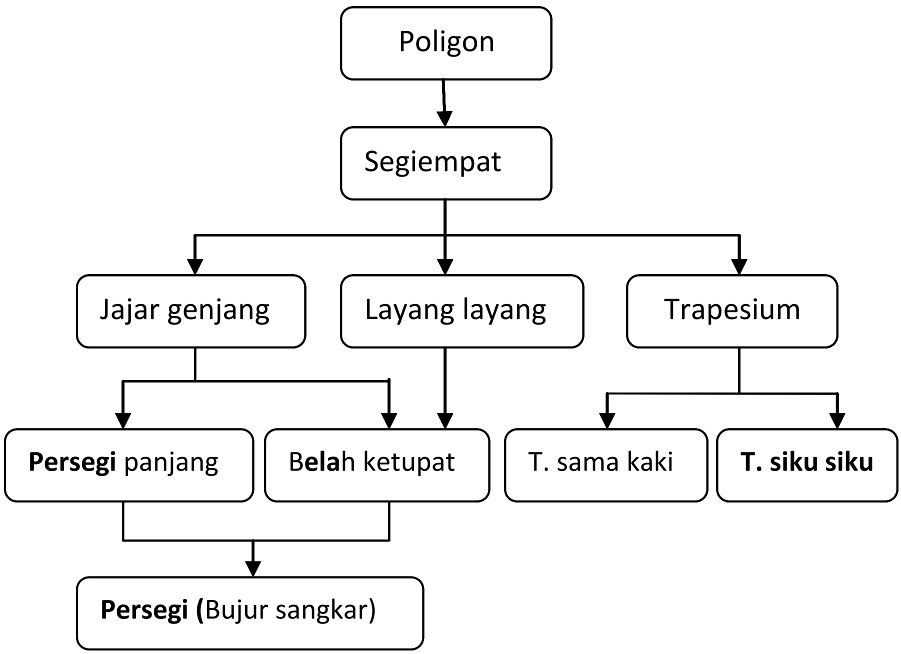
Pada kasus, responden menolak untuk mengakui bahwa persegi panjang, persegi, dan belah ketupat merupakan jajaran genjang. Mereka tidak memahami definisi jajaran genjang, sehingga digolongkan dalam tipe *pre-conception*.Terdapat sedikit responden dapat menjelaskan definisi jajaran genjang, bahwa jajaran genjang adalah segiempat yang memiliki dua pasang sisi sejajar sama panjang dan sudut-sudut yang berhadapan sama besar. Namun di dalam pemikirannya tetap menganggap gambar A, C, dan D bukan jajaran genjang. Miskonsepsi ini digolongkan dalam *prototyping error*. Guru hanya memahami kekekalan bentuk melalui contoh baku yaitu gambar jajaran genjang. Guru menganggap contoh baku sebuah konsep dianggap sebagai tipe contoh satu-satunya. Guru tidak memahami definisi jajar genjang tetapi hanya memahami representasi melalui gambar visual baku.

Guru mengajarkan pengenalan bidang datar secara sepotong-sepotong dengan meyakini berdasar gambar, tanpa memperhatikan sifat-sifat dari bangun datar tersebut. Guru mendefinikan suatu bangun ruang berdasarkan ontologi (model gambar saja), tanpa memahami epistimologi pengetahuan terlebih dahulu.

Bidang Banyak Segiempat

- Segiempat adalah suatu segi banyak (Polygon) yang memiliki empat sisi dan empat sudut.
- Segiempat adalah salah satu bentuk dasar dalam geometri yang paling populer.
- Dalam trigonometri, setiap sudut dalam bangun polygon diberi nama dengan satu huruf.

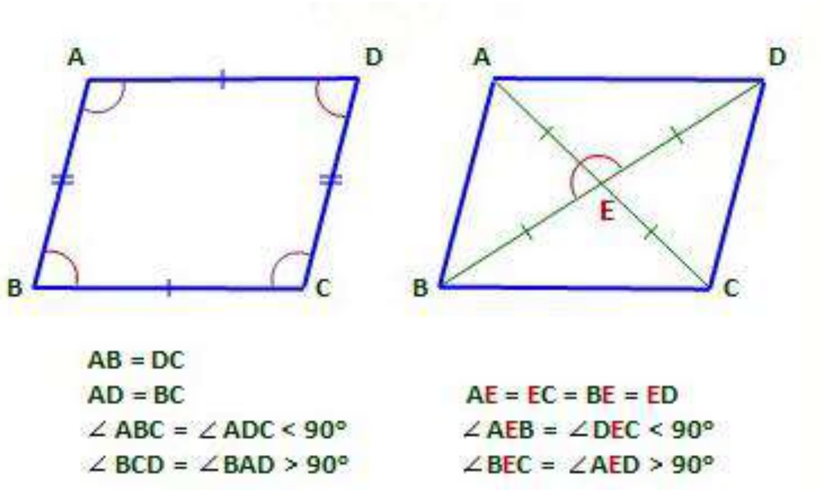
Skema Konsep Segiempat



Gambar 3.2. Skema Konsep Segiempat

Jajar Genjang

Jajar genjang adalah segiempat dengan sisi-sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang serta sudut-sudut yang berhadapan sama besar .



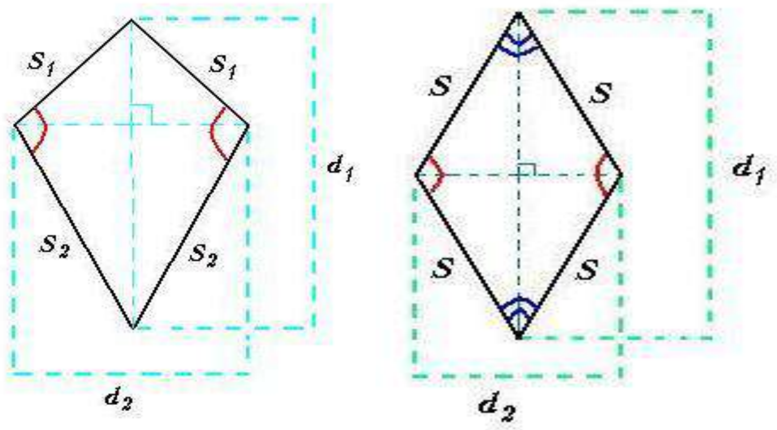
Gambar 3.3. Jajar Genjang

Layang - Layang

Layang-layang adalah segiempat yang memiliki dua pasang sisi berdekatan sama panjang, dengan sedikitnya satu pasang sudut yang berhadapan sama besar.

Layang-layang (bahasa Inggris: *kite*) adalah bangun datar yang dibentuk oleh dua segitiga kongruen yang masing-masing sisi terpanjangnya atau alasnya berhimpit dan saling membentuk sudut.

Layang-layang dengan keempat sisi yang sama panjang disebut **belah ketupat.**



Gambar 3.4. Layang Layang

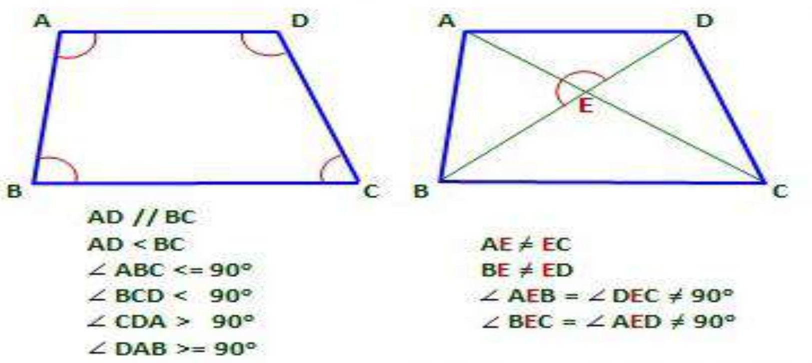
Catatan khusus:

- Layang-layang bisa menjadi belah ketupat
- Dalam kasus khusus di mana keempat sisi memiliki panjang yang sama, layang-layang memenuhi definisi belah ketupat.
- Pada gilirannya, belah ketupat bisa menjadi bujur sangkar jika sudut bagian dalamnya 90 °.

Sumber: https://www.mathopenref.com/kite.html

Trapesium

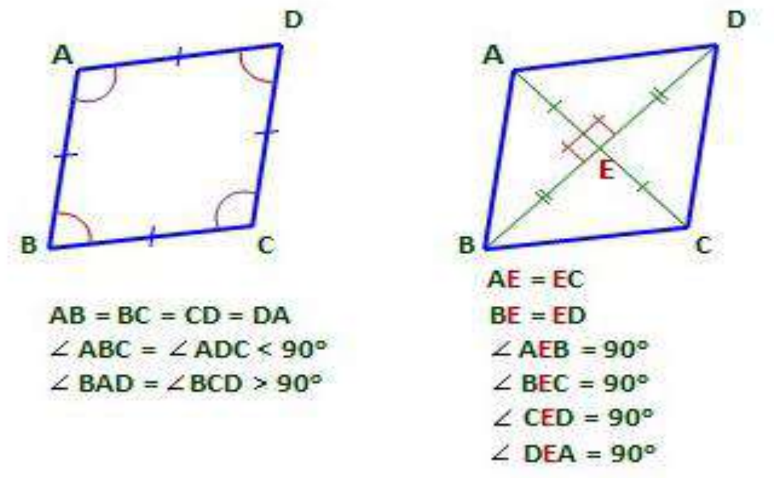
Trapesium adalah segiempat yang memiliki dua sisi (satu pasang) sejajar dan dua sisi yang lainnya tidak sejajar. Sisi-sisi yang tidak sejajar disebut kaki trapesium dan sisi terpanjang (yang sejajar) dari trapesium disebut alas trapesium.



Gambar 3.5. Trapesium

Belah Ketupat

Belah ketupat adalah segiempat yang keempat sisi-sisinya sama panjang, atau belah ketupat adalah jajar genjang yang dua sisinya yang berdekatan sama panjang, atau belah ketupat adalah layang-layang yang keempat sisi-sisinya sama panjang.

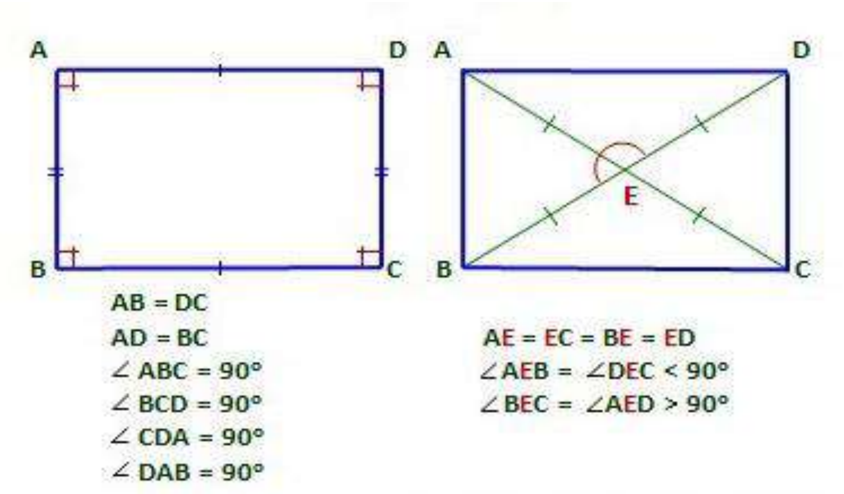


Gambar 3.6. Belah Ketupat

Persegi Panjang

Persegi panjang adalah segiempat dengan dua pasang sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang, serta keempat sudutnya sama besar yaitu siku-siku (90^0).

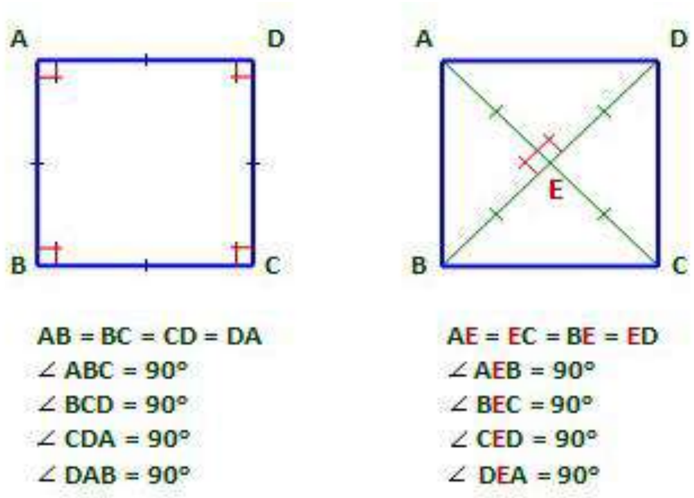
Persegi panjang adalah jajar genjang yang keempat sudutnya sama besar atau siku-siku (90^0).



Gambar 3.7. Persegi Panjang

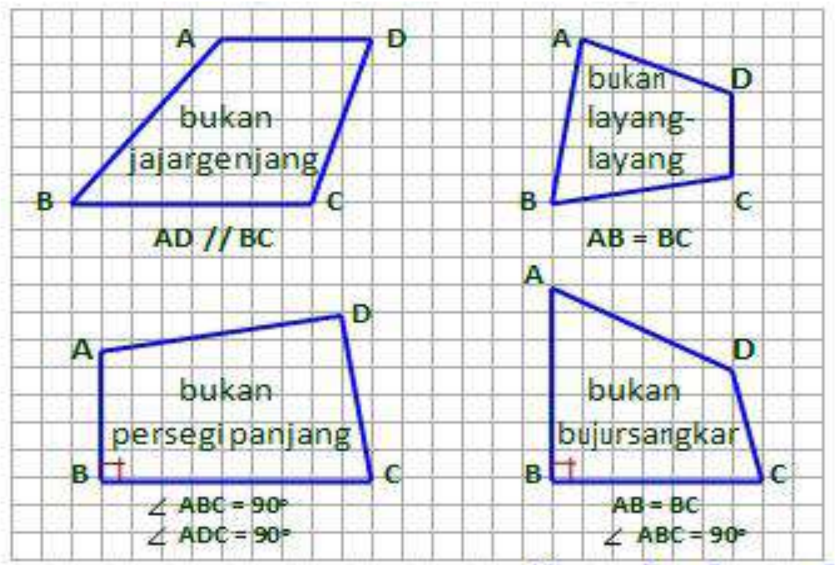
Persegi atau Bujursangkar

Persegi adalah segiempat yang keempat sisi-sisinya sama panjang dan keempat sudutnya sama besar (siku-siku = 90^0). Persegi didefinisikan sebagai persegi panjang yang keempat sisinya sama panjang. Persegi adalah belah ketupat yang keempat sisinya sama panjang dan sudutnya siku-siku.



Gambar 3.8. Persegi

Segiempat Sebarang

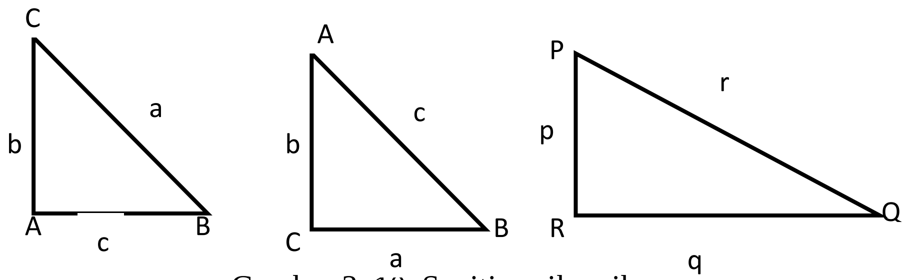


Gambar 3.9. Segiempat Sebarang

3.7 Miskonsepsi Teori Pythagoras

Teorema Pythagoras merupakan sebuah teorema dalam geometri. Bunyi teorema Pythagoras adalah: **"Kuadrat dari panjang sisi miring segitiga siku-siku sama dengan jumlah kuadrat dari panjang kedua sisi lainnya".**

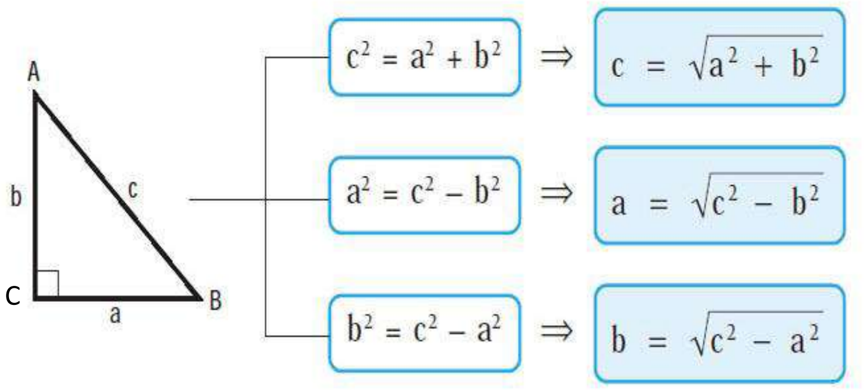
Teorema Pythagoras tersebut dapat dianalogikan ke dalam model segitiga siku-siku ABC, PRQ, atau lainnya. Kesalahanpahaman (miskonsepsi) yang terjadi di sekolah, bahwa teori Pythagoras hanya dipandang sebagai rumus yang harus dihapalkan untuk menentukan panjang sisi miring suatu segitiga siku-siku. Rumus yang dikenalkan kepada siswa hanyalah sebatas $a^2 = b^2 + c^2$, bisa juga $c^2 = b^2 + a^2$ tanpa disajikan gambar model segitiga siku-sikunya. Hal ini memicu terjadinya miskonsepsi *Overgeneralization*, dimana penerapan konsep kurang dapat dipahami dan aturan yang diterapkan dianggap tidak relevan.



Gambar 3. 10 Segitiga siku-siku

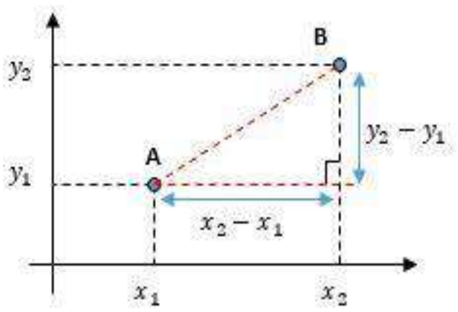
Perlu dipahami bersama bahwa rumus teori Pythagoras tidak mesti harus $a^2 = b^2 + c^2$, bisa juga $c^2 = b^2 + a^2$ juga bisa $r^2 = p^2 + q^2$, atau $k^2 = m^2 + n^2$ atau yang lainnya tergantung pada analogi sisi miring pada model segitiga siku-siku tersebut.

Formula Teori Pythagoras pada segitiga ABC dengan siku-siku di titik C.



Menghitung jarak dua titik A ke titik B

Teori Pythagoras banyak memiliki keguanaan dan dapat diimplementasikan ke dalam berbagai pemecahan masalah. Salah satunya untuk menentukan jarak antara dua titik A dan titik B.



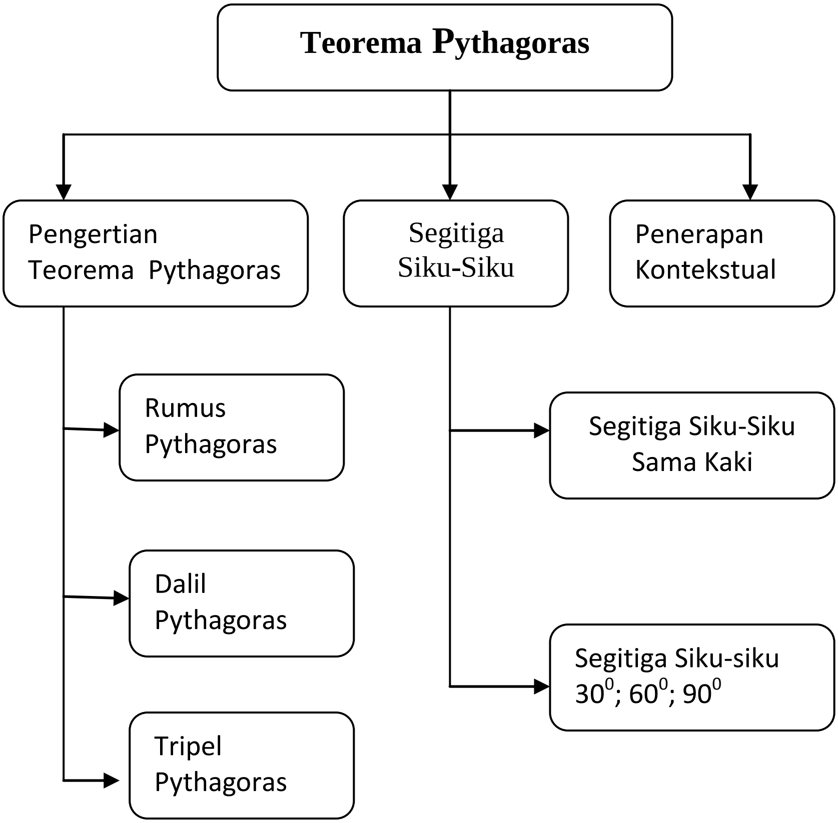
Berlaku:

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Atau

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Peta Konsep Teori Pythagoras



Gambar 3.11 Peta Konsep Teorema Pythagoras

Beberapa segitiga siku-siku memiliki panjang sisi yang saling terkait antar sisi yang satu dengan sisi yang lain. Sehingga ketiga sisi-sisinya memiliki ukuran panjang dengan angka yang istimewa atau seringkali disebut sebagai tripel Pythagoras.

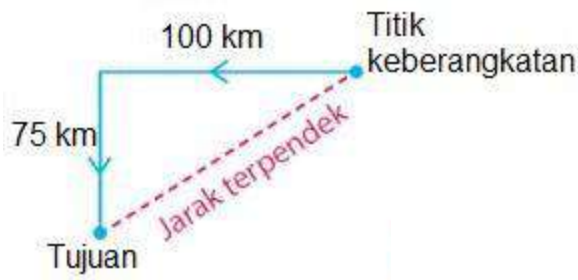
Tripel Pythagoras dalam segitiga siku-siku

No.	Tipe 1	Tipe 2	Tipe 3	Tipe 4
1	3 , 4 , 5	5 , 12 , 13	7 , 24 , 25	8 , 15 , 17
2	6 , 8 , 10	10 , 24 , 26	14 , 48 , 50	16 , 30 , 34
3	9 , 12 , 15	15 , 36 , 39	21 , 72 , 75	24 , 45 , 51
4	12 , 15 , 20	20 , 48 , 52	Dst.	Dst.
5	15 , 20 , 25	25 , 60 , 65		
6	Dst.	Dst.		

Latihan

Soal ❶ (*UN SMP Tahun 2016*)
Perahu berlayar sejauh jarak 100 km dari titik awal ke arah barat. Lalu perahu berbelok arah ke selatan dengan sudut 90^0 sejauh jarak 75 km. Tentukan jarak terpendek yang ditempuh perahu tersebut dari titik awal keberangkatan

Alternatif penyelesaian:



Jarak = $\sqrt{75^2 + 100^2} = \sqrt{15625} = 125$

Jadi jarak terpendek perahu dari titik awal adalah 125 km.

BAB IV

MATERI PENGKAYAAN PEMBELAJARAN

4.1 Perkalian Bilangan Bulat

Definisi Perkalian

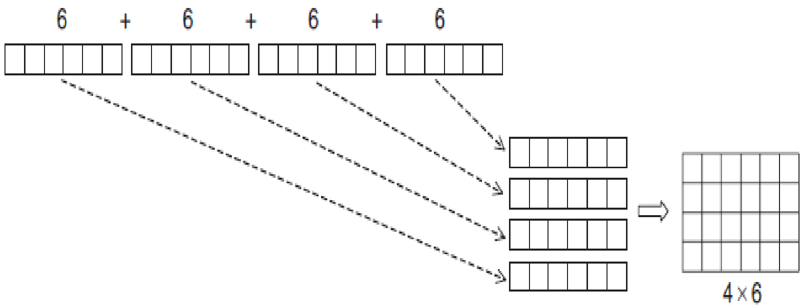
Definisi : $a \times b = \underbrace{b + b + b + \ldots \ldots\ldots + b}_{\text{Sebanyak } a \text{ suku}}$

Keterangan:

Perkalian *a* dan *b* atau *(a x b)* adalah penjumlahan berganda yang mempunyai sebanyak *a* suku, dan tiap-tiap sukunya adalah *b*.

Jika $a \times b = c$, maka *a* adalah pengali, *b* adalah bilangan yang dikalikan, dan c adalah hasil kali.

Perhatikan peragaan berikut $4 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6 = 24$



Gambar 4.1 Perkalian Baris dan Kolom

Membicarakan tentang hasil akhir, pada perkalian bilangan bulat berlaku hokum komutatif, tetapi proses berbeda. Sesuai definisi perkalian, 4 x 6 sama dengan banyaknya baris 4 (setiap baris berisi 6 satuan) dikalikan banyaknya kolom 6 (setiap kolom berisi 4 satuan).

Perhatikan pemasalahan berikut ini:

Pak Sholeh memiliki 5 ekor ayam betina (ayam petelur). Setiap hari setiap ayam bertelur 1 butir. Berapa jumlah telur ayam yang diperoleh pak Sholeh dari hari Senin sampai Sabtu ?

Permasalahan dijawab dengan cara eksplorasi, banyaknya telur yang dihasilkan oleh ayam-ayam selama hari Senin sampai Sabtu.

Langkah 1 : Membuat Tabel harian Senin sampai Sabtu

Langkah 2 : Mengisi banyaknya telor tiap hari (Senin sampai Sabtu)

Langkah 3 : Menghitung banyaknya telur per hari

Langkah 4 : Menambahkan telur-telur dari hari Senin sampai Sabtu

Langkah 5 : Menyusun model matematika

Langkah 6 : Menentukan hasil akhir

	Senin	**selasa**	**rabu**	**kamis**	**jumat**	**sabtu**
Ayam 1	1	1	1	1	1	1
Ayam 2	1	1	1	1	1	1
Ayam 3	1	1	1	1	1	1
Ayam 4	1	1	1	1	1	1
Ayam 5	1	1	1	1	1	1
Jumlah Telur	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**

Dari Tabel tersebut dapat disusun model matematika sebagai berikut.

$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$ (Penjumlahan berulang)

$6 \times 5 = 30$ (Definisi perkalian)

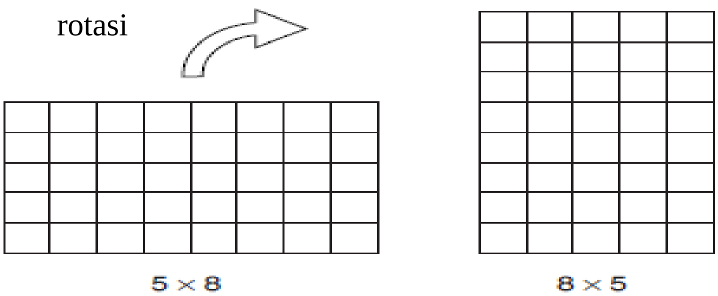
Jadi $6 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ (sesuai definisi)

5 adalah bilangan yang dikalikan dan 6 adalah bilangan pengali.

6×5 BUKAN sebagai $6 + 6 + 6 + 6 + 6$ (tidak sesuai definisi)

Pada Tabel di atas, angka 6 tidak pernah muncul.

Sifat Komutatif Perkalian



Gambar 4.2. Rotasi Perkalian

Secara umum ***m x n*** adalah baris dikalikan kolom

Berbicara tentang hasil perkalian berlaku sifat komutatif

Dimana ***m x n* = *m x n*** (hukum komutatif)

Contoh 1. Tentukan hasil dari 17 x 3 = … .

Langkah – langkah penyelesaian perkalian

17 x 3 = (10 + 7) x 3 → (sifat Asosiatif)

17 x 3 = (10 x 3) + (7 x 3) → (sifat distributive)

17 x 3 = 30 + 21 → (sifat kesamaan)

17 x 3 = 51 → (sifat kesamaan)

Hukum atau sifat-sifat Aritmatika ini harus dikenalkan

Contoh 2. Tentukan hasil dari 16 x 28 = … .

Alternative (1) penyelesaian perkalian

- 16 x 28 = (10 + 6) x (20 + 8)
- 16 x 28 = (10 x 20) + (6 x 20) + (10 x 8) + (6 x 8)
- 16 x 28 = 200 + 120 + 80 + 48
- 16 x 28 = 448

Alternative (2) penyelesaian perkalian dengan Blok Denies.

	20	8
10	**200**	**80**
6	**120**	**48**

200 + 120 + 80 + 48 = 448

Gambar 4.3. Blok Dienes

Contoh 3. Tentukan hasil dari 17 x 13 = … .

Alternative (3) penyelesaian dengan cara lebih cepat

- 17 x 13 = (20 x 10) + (7 x 3)
- 17 x 13 = 200 + 21
- 17 x 13 = 221

Catatan :

Pada langkah pertama, 17 dibulatkan menjadi 20 dan 13 menjadi 10

Langkah kedua, masing-masing angka satuannya dikalikan yaitu 7 x 3

Kemudian hasil dari keduanya ditambahkan.

Latihan 1. Perkalian dengan Cara Cepat

- 18 x 12 = (20 x 10) + (8 x 2)
- = 200 + 16
- = 216

26 x 24 = (30 x 20) + (6 x 4)
= 600 + 24
= 624

82 x 88 = (80 x 90) + (… x ..)
= … + …
= …

61 x 69 = (… x …) + (… x …)
= … + …
= …

Latihan 2. Perkalian dengan Cara Cepat

- 19 X 21 = (20 X 20) – 1^2 = 400 – 1 = 399
- 18 X 22 = (20 X 20) – 2^2 = 400 – 4= 396
- 17 X 23 = (20 X 20) – 3^2 = 400 – 9 = 391
- 16 X 24 = (20 X 20) – …^{2} = 400 – … = … .
- 15 X 25 = …

Catatan:

Misal a = 19, dan b = 21,

a dan b = mendekati 20, dan selisih a, b dengan 20 adalah 1

maka a x b = 19 x 20 = 20^2 – 1^2 = 400 – 1 = 399

Latihan 3. Perkalian dengan Cara Cepat

- 29 X 31 = (30 X 30) – 1^2 = 900 – 1 = 899
- 28 X 32 = (30 X 30) – 2^2 = 900 – 4 = 896
- 39 X 41 = (40 X 40) – 1^2 = 1600 – 1 = 1599
- 38 X 41 = (40 X 40) – … = 1600 – … = …
- 48 X 52 = (50 X 50) – ... = 2500 – …. = …
- 47 X 53 = … .
- 46 X 54 = … .

4.2 Konsep Dasar Pembagian

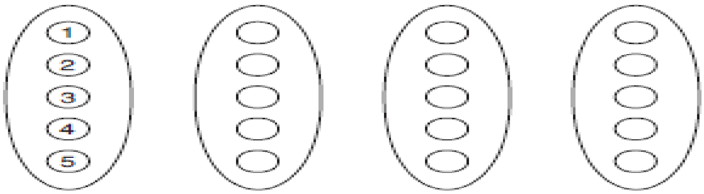
Permasalahan 1.

Pak Sholeh memiliki 20 permen yang akan dibagikan kepada 5 siswa secara merata. Berapa jumlah permen yang diperoleh tiap siswa?

Permasalahan yang diajukan kepada siswa jika ditulis dalam kalimat matematika (model matematika) adalah 20 : 5 = … ?.

Peneliti berfokus pada respon siswa yang telah ditulis pada lembar jawaban. Semua respon jawaban siswa telah dianalaisis dan dikelompokkan menjadi dua kelompok yang berbeda. Peneliti mengelompokan respon jawaban siswa menjadi kelompok A dan B, berikut ini.

Alternatif jawaban siswa kelompok A

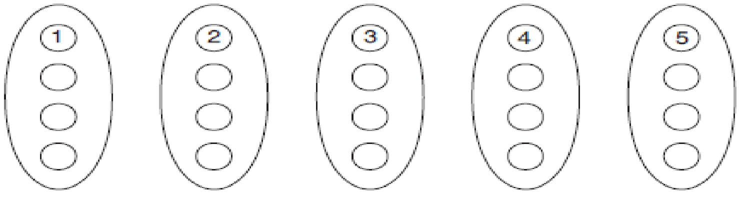


Gambar 4.4. Jawaban siswa kelompok A

Untuk mengetahui proses berpikir siswa (Tipe A), peneliti melakukan wawancara untuk mengklarifikasi jawaban siswa tersebut dengan berpijak pada Gambar 19. Berikut disajikan petikan wawancara terhadap perwakilan siswa.

Peneliti	:	Bagaimana kamu memahami permasalahan ini?
Siswa	:	Ini masalah yang sangat mudah. Saya memahami karena sudah pernah dipelajari di sekolah.
Peneliti	:	Bagaimana kamu menemukan pola pembagian itu?
Siswa	:	Saya mengelompokan 20 permen dengan cara mengambil 5 permen dan memasukan ke dalam kotak - kotak. Hasilnya ada 4 kotak yang berisi permen.
Peneliti	:	Apakah itu sebagai aturan pembagian
Siswa	:	Membagi 20 oleh 5 sama dengan mengurangi 20 secara berulang. Maka, 20 – 5 – 5 – 5 – 5 = 0
Peneliti	:	Apakah itu berlaku secara umum?
Siswa	:	Mungkin, 20 : 5 = 4, yang berarti ada 5an sebanyak 4
Peneliti	:	Mengapa tiap kotak berisi 5 permen, bukan 4 permen
Siswa	:	Saya menghitung banyaknya kotak ada 4
Peneliti	:	Apakah ada cara lain untuk mengatur potongan untuk membuat pola?
Siswa	:	Saya hanya meniru yang dilakukan guru, pada minggu kemarin.
Peneliti	:	Apakah 5 kotak dengan tiap kotak berisi 4 permen sama dengan 4 kotak yang berisi 5 permen?
Siswa	:	Sepertinya berbeda

Berdasarkan hasil petikan wawancara dan memperhatikan respon jawaban siswa (Tipe A) pada Gambar 19, peneliti menafsirkan bahwa ketika siswa bekerja dengan aturan, kemampuan untuk memprediksi secara otomatis membangun kepercayaan diri dan memungkinkan siswa untuk dengan cepat memproses informasi yang lebih sulit dan kompleks. Namun, kenyataannya jawaban siswa menyiratkan bahwa Kita sebagai guru tidak bisa berasumsi bahwa siswa mengetahui aturan sama dengan mengetahui kapan dan bagaimana menggunakan aturan itu. Siswa menyadari bahwa mereka hanya meniru apa yang guru lakukan daripada membangun makna untuk diri mereka sendiri. Ketika siswa mengidentifikasi pola dan merumuskan aturan yang tidak sesuai, maka mereka belum dapat menguji aturan ini dengan teks lain sehingga belum dapat berlaku secara umum. Jadi dapat dikatakan bahwa mereka siswa (Tipe A) mempunyai struktur berpikir komparatif yaitu mereka dalam memproses informasi berada pada tahap mengidentifikasi bagaimana data sama dan berbeda (Betty K. Garner, 2012).



Gambar 4.5. Jawaban siswa kelompok B

Untuk mengetahui proses berpikir siswa (kategori B), peneliti melakukan wawancara untuk mengklarifikasi jawaban siswa tersebut dengan berpijak pada Gambar 2. Berikut disajikan petikan wawancara terhadap siswa.

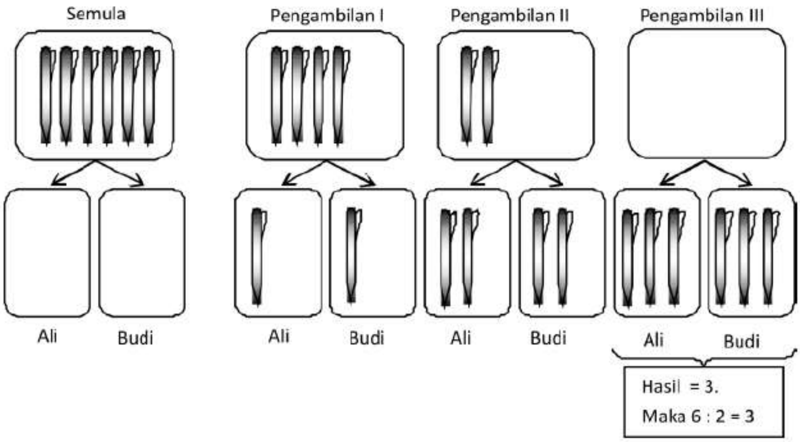
Peneliti	:	Bagaimana kamu memahami permasalahan ini?
Siswa	:	Saya menghubungkan dengan ide membagi sesuatu (permen) harus dilakukan secara adil dan merata.
Peneliti	:	Bagaimana kamu menemukan pola pembagian itu?
Siswa	:	Saya mengambil 5 permen dibagikan kepada lima siswa, kemudian saya mengambil lagi setiap 5 permen harus saya bagikan sampai habis.
Peneliti	:	Apakah itu sebagai aturan pembagian
Siswa	:	Ini aturan pembagian. Hal yang sama saya lakukan terus berulang.
Peneliti	:	Apakah aturan itu dapat berlaku secara umum?
Siswa	:	Akan berlaku secara umum. Jadi 20 dibagi 5 hasilnya sama dengan 4 limaan.

Berdasarkan hasil petikan wawancara dan memperhatikan respon jawaban siswa (B) pada Gambar 20, peneliti menafsirkan bahwa siswa telah memiliki struktur kognitif penalaran logis menggunakan strategi berpikir abstrak untuk secara sistematis dalam memproses dan menghasilkan informasi. Hal ini ditunjukkan dengan kecepatan siswa untuk memproses informasi. Struktur berpikirnya tertata dengan sistematis, mulai dari menghubungkan ide dengan pengalamannya (membuat koneksi), sehingga siswa dapat menemukan pola dan hubungan, merumuskan aturan atau prinsip, sampai menyusun kesimpulan dengan mengabstraksikan prinsip-prinsip menjadi aturan secara umum (generalisasi).

Permasalahan 2.

Ayah memiliki 6 buah bolpoin. Bolpoin tersebut akan dibagikan kepada Ali dan Budi secara adil. Berapa jumlah bolpoin yang diterima Ali dan Budi?.

Peragaan 6 : 2 = 3, dengan langkah-langkah seperti digambarkan di bawah ini.



Gambar 4.6. Peragaan Pembagian

Jadi teknik dari praktik membagi yang benar adalah mengambil beberapa bagian dan membagikan secara merata (adil) sampai habis tidak bersisa.

Pembagian oleh bilangan 10 atau 5

Pembagaian oleh bilangan 10	Pembagian oleh bilangan 5
12000 : 10 = 1200	125 : 5 = $\frac{125}{5} x \frac{2}{2} = \frac{250}{10}$ = 25
1200 : 10 = 120	217 : 5 = $\frac{217}{5} x \frac{2}{2} = \frac{434}{10}$ = 43,4
1250 : 10 = 125	312 : 5 = $\frac{312x2}{10} = \frac{624}{10}$ = 62,4
125 : 10 = 12,5	1020 : 5 = 2040 : 10 = … .
5 : 10 = 0,5	1216 : 5 = … .

Pembagian oleh bilangan 25

Tekniknya a : 25 = (a x 4) : 100

ab : 25 = (ab x 4) : 100

abc : 25 = (abc x 4) : 100

Pembagaian oleh bilangan 25	Proses pembagian oleh bilangan 25
6 : 25 = 0,24	6 : 25 = (6 x 4) : 100 = 24 : 100 = 0,24
15 : 25 = 0,60	15 : 25 = (15 x 4) : 100 = 60 : 100 = 0,60
134 : 25 = 5,36	134 : 25 = (134 x 4) : 100 = 536 : 100 = 5,36
225 : 25 = 9	225 : 25 = (225 x 4) = 900 : 100 = 9
37 : 25 = 1,48	37 : 25 = (37 x 4) : 100 = 148 : 100 = 1,48

4.3 FPB dan KPK

FPB adalah Faktor Persekutuan Terbesar, dan KPK adalah Kelipatan Persekutuan Terkecil dari dua bilangan atau lebih.

Pendekatan kontekstual untuk FPB

Misalkan, ada 12 buah Apel dan 18 buah Jeruk. Kedua buah tersebut akan dibagikan secara merata (sama banyak) kepda beberapa orang.

Pertanyaan:

(a) berapa jumlah Aple dan Jeruk yang diterima jika buah-buahan tersebut dibagikan kepada 2 orang?
(b) berapa jumlah Aple dan Jeruk yang diterima jika buah-buahan tersebut dibagikan kepada 3 orang?
(c) berapa jumlah Aple dan Jeruk yang diterima jika buah-buahan tersebut dibagikan kepada 6 orang?

Pembahasan FPB secara Matematis

Tentukan FPB dari 12 dan 18

Melalui teknik pembagian faktor bersama sebagaimana ditampilkan di bawah ini.

	Bilangan pembagi	**12**	**18**
FPB	**2**	6	9
FPB	**3**	2	3
		x	x

Sehingga FPB-nya adalah perkalian dari bilangan pembagi habis (faktor) bersama yaitu 2 x 3 = 6.

Jadi FPB dari 12 dan 18 adalah 6.

Menentukan FPB dengan cara kelipatan persekutuan bersama yang terbesar.

FPB (12, 18) = ...?

Jawab:

12
1 × 12
2 × 6
3 × 4

18
1 × 18
2 × 9
3 × 6

Dari data akan diperoleh

Faktor dari 12 → 1, 2, 3, 4, 6, 12

Faktor dari 18 → 1, 2, 3, 6, 9, 18

Faktor persekutuan dari 12 dan 18 ialah 1, 2, 3, 6

↓

terbesar

Maka FPB (12, 18) = 6

Sehingga 12 jambu dan 18 rambutan itu dapat dibagi sama banyak maksimal pada 6 orang.

Latihan:

1) Tentukan FPB dari 24 dan 42
2) Tentukan FPB dari 24; 42; dan 72
3) Tentukan FPB (18, 42, dan 60)

Pembahasan KPK secara Matematis

Teknik 1: kelipatan bilangan

Soal:

Berapakah kelipatan persekutuan dari bilangan 2 dan 3?

Berapakah kelipatan persekutuan yang terkecil (KPK) dari bilangan 2 dan 3?

Jawab:

Kelipatan 2 $\rightarrow$ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ...

Kelipatan 3 $\rightarrow$ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...

Kelipatan persekutuan dari 2 dan 3 adalah

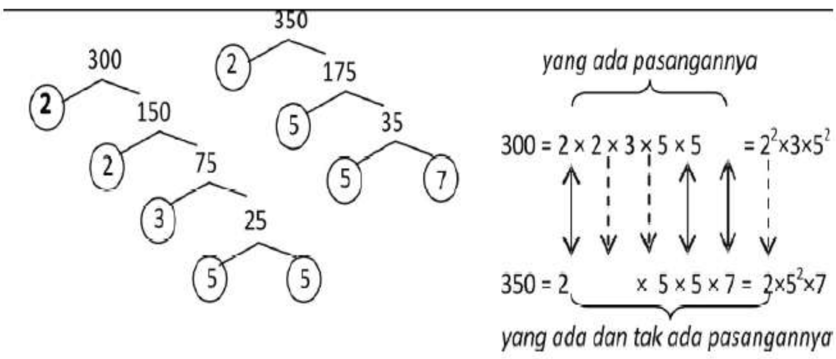
6, 12, 18, 24, ...

$\downarrow$

terkecil

Maka KPK (2, 3) = 6.

2. *Dengan pemfaktoran prima* yang dimaksud adalah



- FPB (300; 350) = $2 \times 5^2 = 50$
- KPK (300; 350) = $2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 2100$

Perlu diingat :

Memperhatikan pengerjaan FPB dan KPK yang dijelaskan dengan cara pemfaktoran prima, seringkali guru memberikan penjelasan sebagai berikut.

(a) FPB = hasil kali faktor prima yang **kembar** dengan pangkat **kecil**

(b) KPK = hasil kali faktor prima yang kem bar dengan pangkat **besar** dan yang **tidak kembar**

Pernyataan (a) dan (b) menimbulkan penafsiran yang berbeda dan rancu serta tidak sesuai dengan definisi FPB dan KPK. Inilah yang menjadi permasalahan, sehingga terjadi kontradiksi dalam benak siswa. Perlu dipahami bahwa tidak semua siswa dapat menangkap penjelasan guru dengan baik. Namun sebaliknya malah penjelasan ini berpotensi dapat merusak struktur kognitif yang sudah ada dalam pikiran siswa tentang FPB dan KPK. Maka untuk tahap awal yang baik dalam menentukan FPB adalah menggunakan penjelasan faktor persekutuan terbesar, dan menentukan KPK menggunakan kelipatan bilangan.

Pemecahan Masalah FPB dan KPK

Seringkali permasalahan FPK dan KPK disajikan bersama. Oleh karena itu, teknik yang efisien dan efektif adalah melalui tabel pembagi habis (faktor) bilangan.

Contoh 1: Tentukan FPB dan KPK dari bilangan 300 dan 350.

Alternative pemecahan masalah sebagai berikut.

	Bilangan Pembagi	**300**	**350**	
FPB	10	300	350	FPB= 10 x 5
	5	30	35	
KPK	2	6	7	
	3	3	7	KPK = 10 x 5 x 2 x 3 x 7
	7	1	7	
		1	1	

Jawab:

FPB (300; 350) = 10 x 5 = 10

KPK (300; 350) = 10 x 5 x 2 x 3 x 7 = 2.100

Contoh 2. Tentukan FPB dan KPK dari 300; 350; dan 400

	Bilangan Pembagi	**300**	**350**	**400**
FPB	10	**300**	**350**	**400**
	5	30	35	40
	2	6	7	8
KPK	2	3	7	4
	2	3	7	2
	3	3	7	1
	3	1	7	1
	7	1	1	1

Jawab:

FPB (300; 350; 400) = 10 x 5 = 10

KPK (300; 350; 400) = 10 x 5 x 2 x 2 x 2 x 3 x 7 = 8.400

<u>Kesimpulan:</u>

- FPB adalah Perkalian faktor (pembagi habis) yang SAMA
- KPK adalah Perkalian SEMUA faktor (pembagi habis)

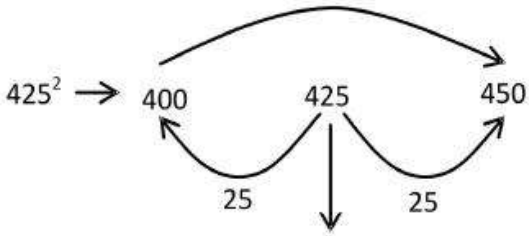
4.4 Perpangkatan dan Penarikan Akar Pangkat

Perpangkatan bilangan dengan angka satuan 5

Definisi	Proses
$5^2 = 5 \times 5 = 25$	Mudah dijawab karena bilangan kecil
$15^2 = 15 \times 15 = 225$	Mudah dijawab karena sudah hapal
$25^2 = 25 \times 25 = 625$	Mudah dijawab karena sudah hapal
$35^2 = 35 \times 35 = 1225$	Mulai agak sulit dijawab, perlu waktu lama karena belum mengetahui tekniknya
$45^2 = 45 \times 45 = 2025$	$45^2 = (40 \times 50) + (5 \times 5)$ $45^2 = 2000 + 25$ $45^2 = 2025$
$55^2 = 55 \times 55 = 3025$	$55^2 = (50 \times 60) + (5 \times 5)$ $55^2 = 3000 + 25$ $55^2 = 3025$
$65^2 = \ldots$.	$65^2 = (60 \times 70) + (\ldots \times \ldots)$ $65^2 = 4200 + \ldots$ $65^2 = \ldots$.
$75^2 = \ldots$.	$75^2 = (\ldots \times \ldots) + (5 \times 5)$ $75^2 = \ldots + 25$ $75^2 = \ldots$.
$85^2 = \ldots$.	$85^2 = (80 \times 90) + (\ldots \times \ldots)$ $85^2 = 7200 + \ldots$ $85^2 = \ldots$.
$95^2 = \ldots$.	$95^2 = (\ldots \times \ldots) + (5 \times 5)$ $95^2 = \ldots + 25$ $95^2 = \ldots$.
$105^2 = \ldots$.	$105^2 = (100 \times 110) + (\ldots \times \ldots)$ $105^2 = 11.000 + \ldots$ $105^2 = \ldots$.
$205^2 = \ldots$.	$205^2 = (200 \times 210) + (\ldots \times \ldots)$ $205^2 = 42.000 + \ldots$ $205^2 = \ldots$.

Cara lain untuk menentukan hasil perpangkatan dua (kuadrat).

$425^2 = \dots$



$$425^2 = 400 \times 450 + 25^2$$

$$= (4\times45\times1000 + 625$$

$$= 180.000 + 625$$

$$= 180.625$$

Penarikan akar pangkat dua

$\sqrt{64} = \dots$ dapat dijawab dengan mudah $\sqrt{64} = 8$, sebab 8 x 8 = 64

$\sqrt{100} = \dots$dapat dijawab mudah $\sqrt{100} = 10$, sebab 10 x 10 = 100

$\sqrt{144} = \dots$ dapat dijawab mudah $\sqrt{144} = 12$, sebab 12 x 12 = 144

$\sqrt{324} = \dots$ dapat dijawab tentu agak lama, sebab … x … = 324

$\sqrt{180625} = \dots$ pasti jawabannya lebih sulit, sebab … x … = 189625

Contoh 1. Tntukan $\sqrt{64} = ...$

Menentukan akar kuadrat memalui faktorisasi prima

Bilangan Pembagi	**64**	**Faktorisasi Prima**
2	64	$\sqrt{64} = .\sqrt{2^2 x 2^2 x 2^2}$ $\sqrt{64} = .2x2x2 = 8$ Jadi $\sqrt{64} = 8$ Sebab 8 x 8 = 64
2	32	
2	16	
2	8	
2	4	
2	2	
	1	

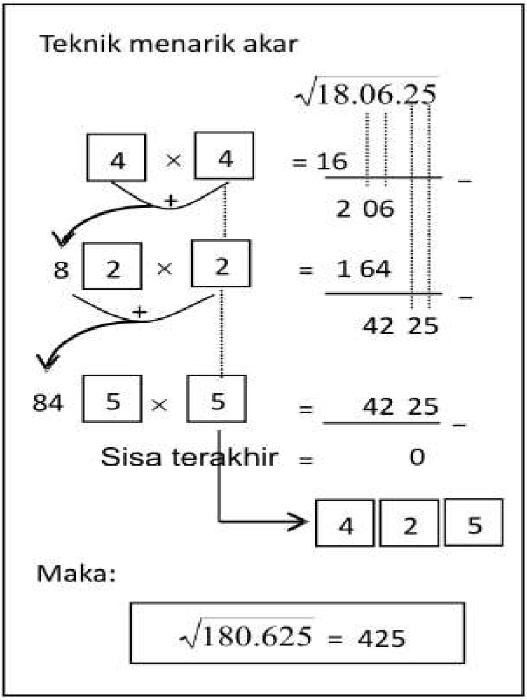
Contoh 2. Tentukan $\sqrt{324} = ...$

Menentukan akar kuadrat memalui faktorisasi prima

Bilangan Pembagi	**324**	**Faktorisasi Prima**
2	324	$\sqrt{324} = .\sqrt{2^2 x 3^2 x 3^2}$ $\sqrt{324} = .2x3x3 = 18$ Jadi $\sqrt{324} = 18$ Sebab 18 x 18 = 324
2	162	
3	81	
3	27	
3	9	
3	3	
	1	

Contoh 3. Tentukan $\sqrt{180625} = ...$

Menentukan akar kuadrat (pangkat dua) memalui teknik **Calandra**



Gambar 4.7 Teknik Menarik Akar Kuadrat

Bagaimana jika bilangan yang ditarik akar pangkatnya bukan bilangan kuadrat? Misalnya $\sqrt{50}$, $\sqrt[2]{12}$, atau $\sqrt{200}$.

$\sqrt{50} = \sqrt{25x2} = 5\sqrt{2}$ → angka 5 diperoleh dari akar kuadrat 25

$\sqrt{12} = \sqrt{4x3} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{200} = \sqrt{100x2} = 10\sqrt{2}$

Penarikan akar pangkat tiga

$\sqrt[3]{8} = 2$, sebab 2 x 2 x 2 = 8

$\sqrt[3]{27} = 3$, sebab 3 x 3 x 3 = 27

$\sqrt[3]{125} = 5$, sebab 5 x 5 x 5 = 125

Tentunya menarik akar poangkat tiga lebih sulit dari pada penarikan akar pangkat dua (kuadrat). Oleh karena itu, cara terbaik adalah menggunakan kemampuan dan keterampilan berhitung kita sebelumnya yaitu melalui faktorisasi prima.

Contoh 1. Tentukan $\sqrt[3]{1728} = ...$

Bilangan Pembagi	1728	Faktorisasi Prima
2	1728	$\sqrt[3]{1728} = .\sqrt[3]{2^3 x 2^3 x 3^3}$ $\sqrt[3]{1728} = 2x2x3 = 12$ Jadi $\sqrt[3]{1728} = 12$ Sebab 12 x 12 x 12 = 1728
2	864	
2	432	
2	216	
2	108	
2	54	
3	27	
3	9	
3	3	
	1	

Pengurangan dua bilangan kuadrat yang berurutan

Teknik: $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$

Contoh 1.

1. $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ Selisih 1

$5^2 - 4^2 = (5 + 4) \times (5 - 4) = 9 \times 1 = 9$

a. $17^2 - 16^2 = \ldots$.

b. $37^2 - 36^2 = \ldots$.

c. $75^2 - 74^2 = \ldots$.

2. $6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$ Selisih 2

$6^2 - 4^2 = (6 + 4) \times (6 - 4) = 10 \times 2 = 20$

a. $27^2 - 25^2 = \ldots$.

b. $32^2 - 30^2 = \ldots$.

c. $62^2 - 60^2 = \ldots$.

3. $15^2 - 10^2 = 225 - 100 = 125$ Selisih 5

$15^2 - 10^2 = (15 + 10) \times (15 - 10) = 125$

a. $25^2 - 20^2 = \ldots$.

b. $65^2 - 60^2 = \ldots$.

c. $75^2 - 70^2 = \ldots$.

Pengurangan dua bilangan kubik yang berurutan

Teknik:	$\mathbf{a^3 - b^3 = (a \times b) \times 3 + (a - b)}$

Contoh 1.

1. $2^3 - 1^3 = 8 - 1 = 7$ Selisih 1
   $2^3 - 1^3 = (2 \times 1) \times 3 + (2 - 1) = 6 + 1 = 7$
2. $3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$
   $3^3 - 2^3 = (3 \times 2) \times 3 + (3 - 2) = 18 + 1 = 19$
3. $4^3 - 3^3 = 64 - 27 = 37$
   $4^3 - 3^3 = (4 \times 3) \times 3 + (4 - 3) = 36 + 1 = 37$
4. $5^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$
   $5^3 - 4^3 = (5 \times 4) \times 3 + (5 - 4) = 60 + 1 = 61$
5. $6^3 - 5^3 = 216 - 125 = 91$
   $6^3 - 5^3 = (6 \times 5) \times 3 + (6 - 5) = 90 + 1 = 91$

Latihan dengan cara cepat

6. $7^3 - 6^3 = (7 \times 6) \times 3 + (7 - 6) = \dots$.
7. $8^3 - 7^3 = \dots$.
8. $9^3 - 8^3 = \dots$.
9. $10^3 - 9^3 = \dots$.
10. $12^3 - 11^3 = \dots$.

BAB V
PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan paparan pembahsan hasil penelitian dapat disampaikan bahwa hal-hal yang telah kita pelajari kadang-kadang tidak membantu dalam mempelajari konsep atau teori baru. Ini terjadi ketika konsep atau teori baru tidak konsisten dengan materi yang dipelajari sebelumnya. Dengan demikian, sangat umum bagi siswa, guru dan orang dewasa untuk memiliki miskonsepsi dalam domain yang berbeda (bidang pengetahuan konten). Para guru sekolah dasar secara merata mengalami tipe miskonsepsi: (1) *pre-conception*, (2) *undergeneralization*, (3) *overgeneralization*, (4) *modelling error*, (5) *prototyping error*; atau (6) *process-object error* (Ben-Hur, 2006) dalam pengajaran matematika di sekolah dasar.

Miskonsepsi dalam pengajaran matematika di sekolah dasar terjadi karena beberapa alasan. Guru umumnya tidak menyadari bahwa pengetahuan yang mereka miliki salah. Guru menafsirkan pengalaman baru melalui pemahaman yang keliru ini, sehingga mengganggu kemampuan untuk memahami informasi baru dengan benar. Pemahaman konsep matematika yang keliru selama bertahun-tahun lamanya bersifat stabil, permanen dan mengakar (Desstya et al., 2019). Miskonsepsi yang bersifat stabil, permanen dan mengakar disebut "miskonsepsi ontologis," dalam pemikiran guru. Miskonsepsi

Ontologis berhubungan dengan keyakinan ontologis yaitu, keyakinan tentang kategori dan sifat dasar dunia (Burgoon et al., 2010). Sehingga, patut diduga bahwa miskonsepsi yang dimiliki siswa berawal dari “miskonsepsi ontologis” guru dalam pengajaran matematika di sekolah dasar.

Miskonsepsi cenderung sangat tahan terhadap pengajaran, karena pembelajaran memerlukan penggantian atau pengorganisasian kembali pengetahuan guru secara radikal. Miskonsepsi dapat diganti atau dihilangkan dengan mengubah kerangka kerja guru. Mengingat bahwa, pemahaman konsep baru yang diperoleh, bisa jadi mendukung, kurang tepat atau bahkan bertentangan dengan pehamanan konsep sebelumnya. Pernyataan ini didukung oleh pendapat Gooding dan Metz (2011) yang mengatakan “Ketika informasi datang mencapai lapisan luar *celebral* untuk dianalisis, otak akan mencoba untuk mencocokkan berbagai komponen dengan melihat kembali memori yang sudah ia ingat sebelumnya dengan ciri yang sama.”

Hasil temuan penelitian ini mengungkapkan bahwa kemahiran matematika guru sekolah dasar perlu ditingkatkan. Berbagai kesalahan dan miskonsepsi berorientasi pada kesalahan konseptual dan prosedural dalam pengajaran matematika. Telah terjadi msikonsepsi bersifat stabil, permanen dan mengakar "miskonsepsi ontologis," dalam pemikiran guru. Penyebab terjadinya miskonsepsi yaitu (1) Guru tidak menyadari bahwa pengetahuan matematika yang mereka miliki salah atau keliru; (2) Pengetahuan matematika yang dimiliki guru telah diterima sebagai doktrin-doktrin yang kaku tanpa ada alasan untuk menyangkal selama bertahun-tahun lamanya. (3) keyakinan guru terhadap pengetahuan yang diterimanya, bersifat stabil, permanen dan mengakar "miskonsepsi ontologis," dalam pemikiran guru. (4) Guru menafsirkan pengalaman baru melalui pemahaman yang keliru, sehingga menghambat masuknya informasi baru dengan benar. Miskonsepsi cenderung sangat tahan terhadap pengajaran dan sulit diperbaiki (Bayuni, Sopandi, & Sujana, 2018). Oleh karena itu, pembelajaran memerlukan penggantian atau pengorganisasian kembali pengetahuan guru secara radikal. Melalui pelatihan kemahiran matematika, miskonsepsi dapat diganti atau dihilangkan dengan cara mengubah kerangka kerja pengajaran matematika.

5.2 Saran

Berdasarkan temuan penelitian, untuk menghilangkan kesalahan dan miskonsepsi pengajaran matematika di sekolah dasar, disarankan : (1) guru selalu meningkatkan kemahiran matematika dalam hal pemahaman teori belajar, dan penguasaan inti materi dari tiap-tiap pokok bahasan matematika; (2) kemahiran matematika untuk mengubah kerangka kerja dalam pengajaran matematika dapat ditingkatkan melalui kegiatan workshop, seminar, diskusi dengan para ahli bidang matematika dan kelompok kerja guru; (3) melakukan aplikasi materi matematika pada kehidupan sehari-hari terutama penggunaan nalar dan pikiran untuk memecahkan persoalan kehidupan di masyarakat sehingga

5.3 Keterbatasan

Buku ini disusun berdasar hasil penelitian dan survey dalam kegiatan pengabdian masyarakat. Tentunya miskonsepsi pembelajaran yang disajikan di dalam buku ini hanyalah sebagian kecil dari permasalahan pembelajaran matematika di sekolah dasar. Masih banyak permasalahan – permasalahan pembelajaran matematika di sekolah yang masih perlu dibenahi dari segi strategi atau pendekattan, metode mengajar, dan teknik mengajar yang selanjutnya dapat dijadikan bahan penelitian. Sehingga para pembaca atau para peneliti lain yang tertarik untuk meneliti lebih lanjut tentang miskonsepsi pembelajaran matematika di sekolah dasar diharapkan dapat memperkaya khasanah pembelajaran matematika.

DAFTAR PUSTAKA

Aliustaoğlu, F., Tuna, A., & Biber, A. Ç. (2018). Misconceptions of sixth grade secondary school students on fractions. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *10*(5), 591–599. https://doi.org/10.26822/iejee.2018541308

Anwar, Z. (2012). Pembelajaran Matematika. *Jurnal Penelitian Ilmu Pendidikan*, *5*(2), 24–32. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.4236/ojo.2014.48035

Awofala, A. O. A. (2017). Assessing Senior Secondary School Students' Mathematical Proficiency as Related to Gender and Performance in Mathematics in Nigeria. *International Journal of Research in Education and Science*, 488–488. https://doi.org/10.21890/ijres.327908

Bayuni, T. C., Sopandi, W., & Sujana, A. (2018). Identification misconception of primary school teacher education students in changes of matters using a five-tier diagnostic test. *IOP Conf. Series: Journal of Physics*, *1013*(12086), 1–8. https://doi.org/doi :10.1088/1742-6596/1013/1/012086

Bekkink, M. O., Donders, A. R. T. R., Kooloos, J. G., De Waal, R. M. W., & Ruiter, D. J. (2016). Uncovering students' misconceptions by assessment of their written questions. *BMC Medical Education*, *16*(1), 1–7. https://doi.org/10.1186/s12909-016-0739-5

Ben-Hur, M. (2006). Concept-Rich Mathematics Instruction: Building a Strong Foundation for Reasoning and Problem Solving. In *Concept-Rich Mathematics Instruction: Building a Strong Foundation for Reasoning and Problem Solving* (Vol. 6, pp. 1–103). Alexandria: Association for Supervision and Curriculum Development, Alexandria, VA. Retrieved from https://eric.ed.gov/?id=ED494296

Betty K. Garner. (2012). *Getting to Got It: Helping Struggling Students Learn How to Learn. Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).1703 North Beauregard St. Alexandria, VA 22311-1714*. Retrieved from

http://www.ascd.org/publications/books/107024/chapters/Cognitive-Structures@-What-They-Are-and-Why-They-Matter.aspx
Beyers, J. (2011). Development and evaluation of an instrument to assess prospective teachers ' dispositions with respect to mathematics. *International Journal of Business and Social Science*, *2*(16), 20–33.
Burgoon, J., Heddle, M., & Duran, E. (2010). Re-Examining the Similarities Between Teacher and Student Conceptions About Physical Science. *Journal of Science Teacher Education*, *3*(7), 859–872. Retrieved from https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1007/s10972-009-9177-0
Desstya, A., Prasetyo, Z. K., Susila, I., Suyanta, S., & Irwanto, I. (2019). Developing an Instrument to Detect Science Misconception of an Elementary School Teacher. *International Journal of Instruction*, *12*(3), 1–18.
Diyanahesa, N. E.-H., Kusairi, S., & Latifah, E. (2018). Development of Misconception Diagnostic Test in Momentum and Impulse Using Isomorphic Problem. *Journal of Physics: Theories and Applications*, *1*(2), 145. https://doi.org/10.20961/jphystheor-appl.v1i2.19314
Feldhaus, C. A. (2014). How Pre Service Elementary School Teachers' Mathematical Dispositions are Influenced by School Mathematics. *American International Journal of Contemporary Research*, *4*(6), 91–97. Retrieved from http://www.aijcrnet.com/journals/Vol_4_No_6_June_2014/11.pdf
Flevares, L. M., & Schiff, J. R. (2014). Learning mathematics in two dimensions: A review and look ahead at teaching and learning early childhood mathematics with children's literature. *Frontiers in Psychology*, *5*(MAY), 1–12. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2014.00459
Gooding, J., & Metz, B. (2011). From Misconceptions to Conceptual Change. *Science Teacher*, *78*(4), 34–37. Retrieved from https://eric.ed.gov/?id=EJ921657
Groves, S. (2012). Developing Mathematical Proficiency. *Journal of*

Science and Mathematics Education in Southeast Asia, *35*(2), 119–145.
Kemendikbud. (2016). *Hasil Surve TIMSS 2015* (Vol. Desember). Indonesia. Retrieved from https://puspendik.kemdikbud.go.id/seminar/upload/Hasil Seminar Puspendik 2016/Rahmawati-Seminar Hasil TIMSS 2015.pdf
Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. (N. R. C. Mathematics Learning Study Committee, Ed.). National Research Council.
Kusmaryono, I., Ubaidah, N., Ulya, N., & Kadarwati, S. (2019). Have Teachers Never Been Wrong? Case Studies of Misconceptions in Teaching Mathematics in Elementary Schools. *DAYA MATEMATIS : Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika*, *7*(2), 209–218.
Kusumadewi, R. F., Kusmaryono, I., Jamallullail, I., & Saputro, B. A. (2019). Analisis Struktur Kognitif Siswa Kelas IV Sekolah Dasar dalam Menyelesaikan Masalah Pembagian Bilangan Bulat. *Journal of Medives : Journal of Mathematics Education IKIP Veteran Semarang*, *3*(2), 251–259.
MacGregor, J. C. D. (2013). Perceiving low self- esteem in close others impedes capitalization and undermines the relationship. *Personal Relationship*, *20*(4), 690–705. Retrieved from https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/pere.12008
Ming, C. Y., Eng, P., Foong, N. S., & Shien, N. K. (2017). Undergraduates ' Error Patterns And Misconceptions In Further Differential Equations. *International Academic Research Journal of Social Science*, *3*(1), 65–70.
Mohyuddin, R. G., & Khalil, U. (2016). Misconceptions of Students in Learning Mathematics at Primary Level. *Bulletin of Education and Research*, *38*(1), 133–162.
NCTM. (2000). *Procedural Fluency in Mathematics*. Reston. Retrieved from https://www.nctm.org/.../Procedural-Fluency-in-Mathematics...
Novak, J. . (2011). A theory of education:Meaningful Learning Underlies the Constructive Integration of Thinking, Feeling, and

Acting Leading to Empowerment for Commitment and Responsibility. *Meaningful Learning Review*, *6*(2), 1–14.
NRC: Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics. In Mathematics Learning Study Committee (Ed.), *National Research Council* (pp. 1–462). National Academies Press. Retrieved from https://www.ru.ac.za/media/rhodesuniversity/content/sanc/documents/Kilpatrick, Swafford, Findell - 2001 - Adding It Up Helping Children Learn Mathematics.pdf
OECD. (2008). 21st Century Learning : Research , Innovation and Policy. *Centre of Educational Research and Inovation*, *12*(1), 1–13.
Ojose, B. (2015). Students' Misconceptions in Mathematics: Analysis of Remedies and What Research Says. *Ohio Journal of School Mathematics*, *72*(1), 30–34.
OSTLER, E. (2011). Teaching Adaptive and Strategic Resoning Through Formula Derivation: Beyond Formal Semiotic. *Sutra: International Journal of Mathematics Science Education*, *4*(2), 16–26. Retrieved from www.tmrfindia.org/sutra/v4i22.pdf%0A
Sansome, E. J. (2016). *Building teachers ' pedagogy practices in reasoning , to improve students ' dispositions towards mathematics*.
Saputri, D. A. F., & Widyaningrum, T. (2016). Misconceptions Analysis on the Virus Chapter in Biology Textbooks for High School Students Grade X. *International Journal of Active Learning*, *1*(1), 31–37.
Sarwadi, R., & Shahrill, M. (2014). Understanding Students' Mathematical Errors and Misconceptions: The Case of Year 11 Repeating Students. *Mathematics Education Trends and Research*, *2014*, 1–10. https://doi.org/10.5899/2014/metr-00051
Sullivan, P. (2011). *Australian Education Review Teaching Mathematics : Using research-informed strategies*. *Educational Research* (Vol. 84).
Ulfiana, E., Mardiyana, M., & Triyanto, T. (2019). The students' mathematical critical thinking skill ability in solving mathematical problems. *Journal of Physics: Conference Series*,

1180(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1180/1/012015

Watson, K. L. (2015). *Examining the Effects of College Algebra on Students' Mathematical Dispositions*. *All Theses and Dissertations. BYU Scholar Archive*. Brigham Young University. Retrieved from https://scholarsarchive.byu.edu/etd/5601

GLOSARIUM

Adaptive reasoning (penalaran adaptif) didefinisikan sebagai "kapasitas untuk berpikir logis tentang hubungan antara konsep dan situasi" (NRC, 2001, hal. 129).

Disposisi matematis produktif didefinisikan sebagai suatu keyakinan dan sikap seseorang tentang matematika yang mendukung kecenderungan untuk melihat matematika sebagai hal yang masuk akal, berguna, dan berharga. (Beyers, 2011; Feldhaus, 2014; NCTM, 2011; Sansome, 2016; Watson, 2015).

Fakta matematika adalah sesuatu yang bisa dihafalkan atau ditulis.

Kemahiran matematis adalah kualitas yang menunjukkan keahlian, kompetensi, pengetahuan, keyakinan, dan kelancaran dalam mengerjakan dan membelajarkan matematika serta menjadi pemecah masalah yang mahir dengan disposisi produktif yang tinggi (Groves, 2012; NRC: Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001).

Kefasihan atau kelancaran prosedural didefinisikan sebagai "pengetahuan tentang prosedur, pengetahuan tentang kapan dan bagaimana menggunakannya dengan tepat, dan keterampilan dalam melakukan secara fleksibel, akurat, dan efisien"

Kompetensi strategis didefinisikan sebagai "kemampuan untuk merumuskan masalah matematika dan menyelesaikannya" (NRC, 2001, hal. 124).

Konsep dalam **matematika** adalah ide abstrak yang meyakinkan orang dapat mengklasifikasikan objek-objek atau kejadian-kejadian ke dalam contoh atau bukan contoh dari suatu objek tertentu (Gagne dalam Arsat, 2007: 8).

Miskonsepsi adalah kesalahpahaman dan salah tafsir berdasarkan salah makna (Ojose, 2015).

Miskonsepsi Ontologism yaitu konsep pengajaran yang diyakini benar ternyata konsep pengajaran itu salah dan bersifat mengakar (Ben-Hur, 2006). 26

Modelling error adalah kesalahan yang terjadi ketika individu hanya meniru contoh pengerjaan yang salah dari representasi matematis sebelumnya. Seseorang gagal untuk dapat memberi alasan melalui pemodelan matematika yang ditampilkan.

Overgeneralization adalah kasus miskonsepsi, dimana penerapan konsep kurang dapat dipahami dan aturan yang diterapkan dianggap tidak relevan.

Pemahaman konseptual didefinisikan sebagai "pemahaman konsep-konsep matematika, operasi, dan prosedur" (NRC: Kilpatrick et al., 2001)

Pre-conseption merupakan kesalahan awal, sebelum seseorang memahami konsep dengan tepat. Kesalahan terjadi dalam pemahaman konsep awal, dan merupakan hal yang mendasar.

Process-object error teridentifikasi dalam kasus terjadinya kesalahan proses penyelesaian masalah. Salah satunya karena mereka tidak memahami hukum-hukum aljabar.

Prototyping Error adalah Miskonsepsi yang biasanya terjadi dalam masalah memahami kekekalan bentuk melalui contoh baku, misalnya gambar jajaran genjang. Di dalam pemikiran mereka menganggap bahwa contoh baku sebuah konsep dianggap sebagai tipe contoh satu-

satunya. Mereka tidak memahami definisi jajar genjang tetapi hanya memahami representasi melalui gambar visual baku.

Undergeneralization merupakan bagian yang lebih spesifik dari *pre-conception*. *Undergeneralization* dinyatakan sebagai pemahaman yang terbatas dan kemampuan terbatas untuk menerapkan konsep-konsep. Pemahaman yang terbatas ini, menjelaskan berbagai keadaan mengenai pengetahuan guru pada saat seluruh ide-ide matematika berkembang.

INDEKS

BIOGRAFI PENULIS

	**Imam Kusmaryono,** dosen program studi Pendidikan Matematika FKIP UNISSULA yang produktif berkarya dalam bentuk tulisan di jurnal nasional dan internasional juga penulisan buku. Dalam sembilan tahun terakhir berkecimpung di perguruan tinggi telah berhasil menulis 10 judul buku ISBN: buku ajar, buku referensi, buku monograf, buku ilmiah popular, buku sekolah dll.

	**Rida Fironika Kusumadewi,** Saat ini menjabat sebagai Sekretaris Program Studi PGSD di FKIP UNISSULA. Aktif dalam bidang penelitian dan pengabdian masyarakat. Beberapa buku referensi untuk Pendidikan Matematika SD telah ditulisnya dan menjadi acuan perkuliahan.

	**Nila Ubaidah**, dosen muda Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UNISSULA yang memiliki semangat tinggi dalam berkarya. Mata kuliah yang diampu salah satunya adalah Kapita Selekta Pembelajaran Matematika. Program Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat yang ditekuninya adalah Anak-anak berkebutuhan khusus (downsyndrom).

	**Nuhyal Ulia**, dosen muda Program Studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar FKIP UNISSULA yang memiliki semangat tinggi dalam berkarya. Saat ini menjabat sebagai Ketua Program Studi PGSD. Aktif dalam bidang penelitian dan pengabdian masyarakat. Program Hibah Pengabdian kepada Masyarakat telah didanai Kemenristekdikti